

数I・A + II・B 混合まとめテスト

解答（全62問）

氏名 _____

得点 _____ / 62点

DRILL

融合まとめテスト（全60問）

基本（1～20）

1

融合：2次関数（数I）×微分法（数II） | 同じ関数を2通りで解く

2次関数 $f(x) = x^2 - 6x + 11$ について、(a)数Iの平方完成、(b)数IIの微分法、それぞれの方法で最小値を求めよ。

最小値 2 そのときの x 3

(a) 平方完成すると $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ 。頂点が $(3, 2)$ なので最小値は2（ $x = 3$ のとき）。

(b) $f'(x) = 2x - 6$ 。 $f'(x) = 0$ を解くと $x = 3$ 。これより前では $f'(x) < 0$ （減少）、これより後では $f'(x) > 0$ （増加）なので $x = 3$ で最小。 $f(3) = 9 - 18 + 11 = 2$ 。

どちらの方法でも同じ答えになる。2次関数の場合、平方完成の頂点の x 座標と、微分して $f'(x) = 0$ となる x は必ず一致する。

最小値2（ $x = 3$ のとき）

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、縦の長さ $6 \sin \theta$ 、横の長さ $6 \cos \theta$ の長方形を考える。 $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、この長方形の周の長さ L を求めよ。

$$L = \underline{6+6\sqrt{3}}$$

$\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ なので、数Iの三角比の値から $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

縦の長さ $= 6 \times \frac{1}{2} = 3$ 、横の長さ $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 。

周の長さ $L = 2(3 + 3\sqrt{3}) = 6 + 6\sqrt{3}$

$$L = 6 + 6\sqrt{3}$$

数直線上の点Pは、はじめ座標0にある。1回の操作で、座標0にある点は確率 $\frac{2}{3}$ で座標1に移動し、確率 $\frac{1}{3}$ でその場にとどまる。座標1にある点は、確率 $\frac{2}{3}$ で座標0に戻り、確率 $\frac{1}{3}$ でその場にとどまる。 n 回の操作の後に点Pが座標0にある確率を p_n とする。 p_1, p_2 を、場合を数えて直接求めよ。

$$p_1 = \underline{1/3} \quad p_2 = \underline{5/9}$$

1回目の操作で座標0にとどまる確率は $\frac{1}{3}$ なので、 $p_1 = \frac{1}{3}$ 。

2回目に座標0にいるのは、(i)1回目も2回目もとどまる： $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ 、(ii)1回目に座標1へ移動し、2回目に座標0へ戻る： $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ 。この2つは同時に起こらないので確率を足して $p_2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ 。

$$p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{5}{9}$$

1個のさいころを5回投げるとき、1の目がちょうど2回出る確率を、数Aの反復試行の確率の公式 ${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$ を使って求めよ。

確率 = 625/3888

1回の試行で1の目が出る確率は $p = \frac{1}{6}$ 。5回中2回だけ1の目が出る場合の数は ${}_5C_2$ 通りなので

$$P = {}_5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{36} \times \frac{125}{216} = \frac{1250}{7776} = \frac{625}{3888}$$

$$\frac{625}{3888}$$

命題「実数 x, y について、 $x + y > 2$ ならば、 $x > 1$ または $y > 1$ である」の対偶は「 $x \leq 1$ かつ $y \leq 1$ ならば、 $x + y \leq \boxed{?}$ である」となる。空欄に入る数を求めよ。

空欄 = 2

元の命題の仮定と結論を入れかえて否定すると対偶ができる。「 $x > 1$ または $y > 1$ 」の否定は「 $x \leq 1$ かつ $y \leq 1$ 」、「 $x + y > 2$ 」の否定は「 $x + y \leq 2$ 」。よって対偶は「 $x \leq 1$ かつ $y \leq 1$ ならば $x + y \leq 2$ 」となる。対偶が真であることを示せば、もとの命題も真であることが分かる（対偶を用いた証明）。この対偶を実際に証明する作業は25番で行う。

2

n が自然数のとき、 $4^n - 1$ は3の倍数になる。 $n = 1$ のときと $n = 3$ のときの $4^n - 1$ の値をそれぞれ求め、実際に3の倍数になっていることを確認せよ。

$n = 1$ のとき 3 $n = 3$ のとき 63

$n = 1$ のとき $4^1 - 1 = 3 = 3 \times 1$ 。 $n = 3$ のとき $4^3 - 1 = 64 - 1 = 63 = 3 \times 21$ 。
たしかにどちらも3の倍数になっている。 n が大きくなるほど1つずつ確かめるのは大変なので、「すべての自然数 n について成り立つ」ことを一気に示す数学的帰納法が26番で登場する。

$n = 1$ のとき3、 $n = 3$ のとき63

5人の小テストの得点が4, 6, 7, 8, 10（点）のとき、数Iの定義 $s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$ を使って、平均値 $\bar{x}$ と分散 s^2 を求めよ。

平均 $\bar{x} =$ 7 分散 $s^2 =$ 4

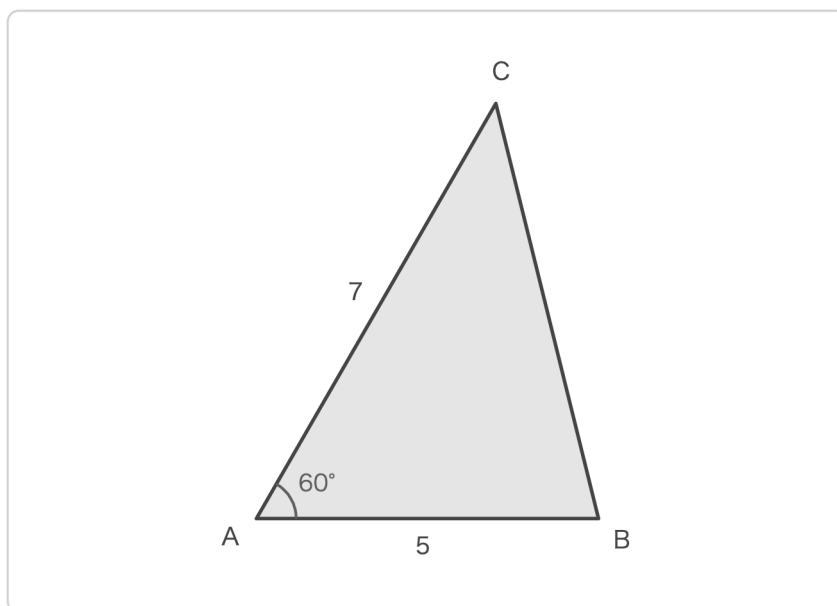
$$\text{平均}\bar{x} = \frac{4 + 6 + 7 + 8 + 10}{5} = \frac{35}{5} = 7。$$

偏差は $-3, -1, 0, 1, 3$ で、2乗すると $9, 1, 0, 1, 9$ 、その和は20。

$$\text{分散}s^2 = \frac{20}{5} = 4$$

平均7点、分散4

$\triangle ABC$ で $AB = 5$, $AC = 7$, $\angle A = 60^\circ$ のとき、余弦定理を使って BC を求めよ。



$$BC = \underline{\underline{\sqrt{39}}}$$

余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos 60^\circ = 25 + 49 - 2 \times 5 \times 7 \times \frac{1}{2} = 74 - 35 = 39$$

$$BC = \sqrt{39}$$

$$BC = \sqrt{39}$$

2次方程式 $x^2 - 4x + 7 = 0$ の判別式 D を求め、実数解をもつかどうかを判定せよ。

$$D = \underline{-12} \quad \text{実数解の個数} = \underline{0}$$

$$D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12$$

D が負なので、実数の範囲では解をもたない（実数解の個数は0個）。ただし数IIでは複素数の範囲まで考えるので、この方程式にも解は存在する。それを実際に求めるのが29番である。

$D = -12$ 、実数解は0個

$x > 0$ のとき、 $f(x) = x + \frac{4}{x}$ の最小値を、数IIの相加平均・相乗平均の関係を使って求めよ。

$$\text{最小値} = \underline{4} \quad \text{そのときの } x = \underline{2}$$

$x > 0$, $\frac{4}{x} > 0$ で、積は $x \times \frac{4}{x} = 4$ （定数）。相加平均・相乗平均の関係より

$$x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{4}{x}} = 2\sqrt{4} = 4$$

等号は $x = \frac{4}{x}$ 、すなわち $x^2 = 4$ 、 $x > 0$ より $x = 2$ のとき成り立つ。

最小値4（ $x = 2$ のとき）

11

図形の性質（数A） | 方べきの定理の値を直接計算する

円 $x^2 + y^2 = 25$ の外部の点 $P(7, 0)$ を通り、円と2点 $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$ で交わる直線を考える。 PA , PB の長さと、方べきの定理で使う $PA \times PB$ の値を求めよ。

$$PA = \underline{12} \quad PB = \underline{2} \quad PA \times PB = \underline{24}$$

$P(7, 0)$ から $A(-5, 0)$ までの距離は $PA = 7 - (-5) = 12$ 。 P から $B(5, 0)$ までの距離は $PB = 7 - 5 = 2$ 。

$$PA \times PB = 12 \times 2 = 24$$

$$PA = 12, PB = 2, PA \times PB = 24$$

12

融合：場合の数（数A）×式と証明（数II） | 組合せの数と二項係数の一致

$(x + 1)^4$ を実際に展開したときの x^2 の係数と、数Aの組合せ ${}_4C_2$ の値を、それぞれ求めて比較せよ。

$$\text{展開したときの } x^2 \text{ の係数} = \underline{6} \quad {}_4C_2 = \underline{6}$$

$$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \text{ なので } x^2 \text{ の係数は } 6。$$

$$\text{一方 } {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6。$$

どちらも6で一致する。これは偶然ではなく、二項定理の一般項 ${}_nC_r x^{n-r}$ の $r = 2$ の場合そのものだからである。

どちらも6

13

式と証明（数II） | 因数分解を割り算の視点で見直す準備

$x^3 - 8$ を因数分解すると $(x - 2)(x^2 + \boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}})$ となる。ア、イに入る数を求めよ。

$$\text{ア} = \underline{\underline{2}} \quad \text{イ} = \underline{\underline{4}}$$

立方の差の公式 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ を $a = x, b = 2$ で使う。

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$\text{ア} = 2, \text{イ} = 4$$

14

融合：三角比（数I）×三角関数（数II） | 度数法をラジアンに変換する

150° をラジアンで表し、数Iの三角比の値として $\sin 150^\circ$ を求めよ。

$$\text{ラジアン} = \underline{\underline{5\pi/6}} \quad \sin 150^\circ = \underline{\underline{1/2}}$$

$$180^\circ = \pi \text{ラジアン} \text{なので、} 150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5\pi}{6} \text{ラジアン、} \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$$

15

融合：整数の性質（数A）×対数関数（数II） | 実際に計算してから対数の威力を知る準備

2^{10} の値を実際に計算し、その値が何桁の数か答えよ。

$$2^{10} = \underline{\underline{1024}} \quad \text{桁数} = \underline{\underline{4}}$$

$2^{10} = 1024$ 。これは4桁の数である。指数が大きくなると実際に計算するのは大変になる——そこで役に立つのが数IIの常用対数である（35番）。

$$2^{10} = 1024 \text{ (4桁)}$$

変数 x, y のデータが $(2, 3), (4, 7), (6, 11)$ の3組ある。この3点はすべて同じ直線上にあることを確かめ、その直線を $y = ax + b$ の形で求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{-1}$$

$(2, 3)$ と $(4, 7)$ を結ぶ直線の傾きは $\frac{7-3}{4-2} = 2$ 。 $(4, 7)$ と $(6, 11)$ を結ぶ直線の傾きも $\frac{11-7}{6-4} = 2$ で一致するので、3点は一直線上にある。

$$y - 3 = 2(x - 2) \text{ より } y = 2x - 1$$

$$y = 2x - 1 \quad (a = 2, b = -1)$$

2点 $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ から等しい距離にある点 (x, y) が満たす条件を求めると、 $x = \boxed{?}$ (y は任意) となる。空欄に入る数を求めよ。

$$x = \underline{3}$$

$$PA = PB \text{ より } PA^2 = PB^2 \text{ なので}$$

$$x^2 + y^2 = (x - 6)^2 + y^2$$

$$x^2 = x^2 - 12x + 36$$

$$12x = 36, x = 3$$

$$x = 3$$

18

融合：確率（数A）×数列（数B） | 期待値の定義とΣの準備

1個のさいころを1回投げるとき出る目の期待値を、数Aの定義（それぞれの値×確率の総和）で求めよ。

期待値 = 3.5

$$\text{期待値} = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \cdots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$3.5 \left(= \frac{7}{2} \right)$$

19

融合：図形の性質（数A）×三角関数（数II） | 円に内接する四角形の対角の関係

円に内接する四角形ABCDで $\angle A = 30^\circ$ のとき、 $\angle C$ の大きさを求めよ。

$\angle C =$ 150

円に内接する四角形の対角の和は 180° なので

$$\angle C = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$\angle C = 150^\circ$$

直線 $3x + 2y = 12$ 上にあり、 x, y がともに正の整数である点 (x, y) をすべて求めよ。

$$x = \underline{2} \quad y = \underline{3}$$

$y = \frac{12 - 3x}{2}$ が正の整数になるには、 $12 - 3x$ が正の偶数である必要がある。 $3x$ が偶数になるのは x が偶数のときなので、 $x = 2, 4, 6, \dots$ を試す。

$$x = 2 \text{ のとき } y = \frac{12 - 6}{2} = 3 \text{ (正の整数、条件を満たす)。}$$

$x = 4$ のとき $y = \frac{12 - 12}{2} = 0$ (正の整数ではないので不適)。 $x \geq 4$ ではこれ以上正の整数解はない。

$$(x, y) = (2, 3)$$

標準 (21~45)

$g(x) = -x^2 + 4x + 1$ の、区間 $0 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

$$\text{最大値} = \underline{5} \quad \text{最小値} = \underline{1}$$

平方完成すると $g(x) = -(x - 2)^2 + 5$ 。頂点は $(2, 5)$ で、これは区間 $[0, 3]$ の内側にある。微分すると $g'(x) = -2x + 4$ で、 $g'(x) = 0$ となるのも $x = 2$ 。頂点が区間内なので最大値は5 ($x = 2$)。

最小値は頂点ではなく区間の端点のどちらかにある。 $g(0) = 1$, $g(3) = -9 + 12 + 1 = 4$ なので、小さい方の $g(0) = 1$ が最小値。

最大値5 ($x = 2$)、最小値1 ($x = 0$)

縦の長さ $6 \sin \theta$ 、横の長さ $6 \cos \theta$ の長方形（ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ）の周の長さ $L(\theta)$ を三角関数の合成を使って最大にし、そのときの θ と最大値を求めよ。

$$\theta = \underline{\pi/4} \quad \text{最大値} = \underline{12\sqrt{2}}$$

$L(\theta) = 2(6 \sin \theta + 6 \cos \theta) = 12 \sin \theta + 12 \cos \theta$ 。合成公式 $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$ を使うと、 $a = b = 12$ より $\sqrt{a^2 + b^2} = 12\sqrt{2}$ 、 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ （ $\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる角）。

$$L(\theta) = 12\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin$ が最大の1になるのは $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき。

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{のとき最大値} 12\sqrt{2}$$

3番の設定で、 p_{n+1} を p_n の式で表すと $p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}$ となる。この漸化式から
 $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ が求まる（ $p_0 = 1$ として）。公比、 p_3 の値、 p_4 の値をそれぞれ求めよ。

$$\text{公比} = \underline{-1/3} \quad p_3 = \underline{13/27} \quad p_4 = \underline{41/81}$$

漸化式 $p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}$ の特性方程式 $\alpha = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}$ を解くと $\frac{4}{3}\alpha = \frac{2}{3}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ 。
 。

$p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \left(p_n - \frac{1}{2}\right)$ となるので、数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列。

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$p_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{27}\right) = \frac{27}{54} - \frac{1}{54} = \frac{26}{54} = \frac{13}{27}$$

$$p_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{81} = \frac{81}{162} + \frac{1}{162} = \frac{82}{162} = \frac{41}{81}$$

$p_3 = \frac{13}{27} \approx 0.481$, $p_4 = \frac{41}{81} \approx 0.506$ と、 n が大きくなるほど p_n は $\frac{1}{2}$ に近づいていく。

$$\text{公比} -\frac{1}{3}, p_3 = \frac{13}{27}, p_4 = \frac{41}{81}$$

4番のさいころを5回投げる試行で、1の目が出た回数を確率変数 X とすると、 X は二項分布 $B\left(5, \frac{1}{6}\right)$ に従う。公式 $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ を使って期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{\underline{5/6}} \quad V(X) = \underline{\underline{25/36}}$$

$$n = 5, p = \frac{1}{6} \text{なので}$$

$$E(X) = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$V(X) = 5 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$$E(X) = \frac{5}{6}, V(X) = \frac{25}{36}$$

5番の対偶「 $x \leq 1$ かつ $y \leq 1$ ならば $x + y \leq 2$ 」を、数IIの不等式証明の型（差をとって0以下を示す）で証明する。 $x \leq 1$, $y \leq 1$ のとき、 $(x - 1) \leq 0$ かつ $(y - 1) \leq 0$ なので、和 $(x - 1) + (y - 1) = x + y - 2 \leq \boxed{?}$ となる。空欄に入る数を求めよ。

$$\text{空欄} = \underline{\underline{0}}$$

$x \leq 1$ より $x - 1 \leq 0$ 、 $y \leq 1$ より $y - 1 \leq 0$ 。0以下の数どうしの和は0以下なので

$$(x - 1) + (y - 1) \leq 0$$

左辺を整理すると $x + y - 2 \leq 0$ 、すなわち $x + y \leq 2$ が示せた。これで対偶が真だと分かったので、5番の元の命題も真である。

0

すべての自然数 n について $4^n - 1$ が3の倍数であることを数学的帰納法で証明する。 $n = k$ のとき $4^k - 1 = 3m$ (m は整数) と仮定すると $4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 4 - 1 = 4(4^k - 1) + \boxed{\text{ア}} = 4 \times 3m + \boxed{\text{ア}} = 3(4m + \boxed{\text{イ}})$ ア、イに入る数を求めよ。

$$\text{ア} = \underline{\underline{3}} \quad \text{イ} = \underline{\underline{1}}$$

$$4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1 = 4(4^k - 1) + 4 - 1 = 4(4^k - 1) + 3 \text{なので、ア} = 3。$$

$$4(4^k - 1) + 3 = 4 \times 3m + 3 = 3(4m + 1) \text{なので、イ} = 1。$$

$3(4m + 1)$ は3の倍数なので、 $n = k + 1$ のときも成り立つ。 $n = 1$ のとき成り立つこと（6番で確認済み）とあわせて、すべての自然数 n について成り立つことが証明できた。

$$\text{ア} = 3、\text{イ} = 1$$

7番の5つの得点4, 6, 7, 8, 10が、それぞれ確率 $\frac{1}{5}$ ずつで出る確率変数 X の値だとみなす。数Bの定義 $E(X) = \sum x_i p_i$, $V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 p_i$ を使って期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求め、7番の結果と比較せよ。

$$E(X) = \underline{\underline{7}} \quad V(X) = \underline{\underline{4}}$$

$$E(X) = (4 + 6 + 7 + 8 + 10) \times \frac{1}{5} = 35 \times \frac{1}{5} = 7$$

$$\text{偏差の2乗の和は7番と同じく20なので } V(X) = 20 \times \frac{1}{5} = 4$$

数Iの平均・分散の定義と、数Bの期待値・分散の定義は、実は同じ計算を別の言葉で呼んでいるだけである。

$$E(X) = 7, V(X) = 4 \text{ (7番と完全に一致)}$$

8番の三角形で、Aを原点、Bを(5, 0)に置く。 $\angle BAC = 60^\circ$ 、 $AC = 7$ より点Cの座標を求め、2点間の距離の公式でBCを計算し、8番の答えと一致することを確認せよ。

$$C \text{ の } x \text{ 座標} = \underline{7/2} \quad C \text{ の } y \text{ 座標} = \underline{7\sqrt{3}/2} \quad BC = \underline{\sqrt{39}}$$

$$C = (7 \cos 60^\circ, 7 \sin 60^\circ) = \left(7 \times \frac{1}{2}, 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$$

2点間の距離の公式より

$$BC^2 = \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{147}{4} = \frac{156}{4} = 39$$

$$BC = \sqrt{39}$$

8番で余弦定理を使って求めた値と完全に一致する。

$$C\left(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right), BC = \sqrt{39}$$

9番の方程式 $x^2 - 4x + 7 = 0$ を、数IIの解の公式を使って複素数の範囲で解け。

解1 = $2+\sqrt{3}i$ 解2 = $2-\sqrt{3}i$

解の公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ に $a = 1$, $b = -4$, $D = -12$ （9番で計算済み）を代入する。

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 2 \pm \sqrt{3}i$$

数Iでは「実数解なし」で終わっていたが、数IIでは複素数の範囲まで考えると、この2次方程式にもきちんと2つの解が存在する。

$$x = 2 + \sqrt{3}i, 2 - \sqrt{3}i$$

$x > 0$ のとき、 $h(x) = x^2 - 6x + 9$ （数Iの2次関数）の最小値を平方完成で求めよ。さらに、 x^2 と9の積 $x^2 \times 9$ が $x = 1$ のときと $x = 2$ のときでどう変わるかを調べ、この2項に相加相乗平均が使えるかを確認せよ。

平方完成での最小値 = 0 $x = 1$ のとき $x^2 \times 9 =$ 9 $x = 2$ のとき $x^2 \times 9 =$
36

$$h(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \text{なので最小値は0 (} x = 3 \text{)}。$$

一方、 x^2 と9の積は $x = 1$ のとき $1 \times 9 = 9$ 、 $x = 2$ のとき $4 \times 9 = 36$ と、 x によって値が変わってしまう。相加相乗平均で最小値が求まるのは「2つの正の項の積がいつも一定（定数）」のときだけなので、 x^2 と9には使えない。10番の x と $\frac{4}{x}$ は積がつねに4で一定だったからこそ、相加相乗平均が使えた。

最小値0。積は9と36で一定でないため相加相乗平均は使えない。

11番の点 $P(7, 0)$ を通る直線 $y = x - 7$ と円 $x^2 + y^2 = 25$ の交点の x 座標を求めよ。さらに、それぞれの交点までの距離の積 $PA' \times PB'$ を計算し、11番の値と一致することを確認せよ。

x 座標（小さい順にコンマ区切り） = 3,4 $PA' \times PB' =$ 24

$y = x - 7$ を円の式に代入すると

$$x^2 + (x - 7)^2 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 49 = 25$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$(x - 3)(x - 4) = 0$ より $x = 3, 4$ 。交点は $(3, -4)$, $(4, -3)$ 。

$$PA' = \sqrt{(7 - 3)^2 + (0 - (-4))^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

$$PB' = \sqrt{(7 - 4)^2 + (0 - (-3))^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$$

$$PA' \times PB' = 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 24$$

どの直線を選んでも積は24で変わらない——これが方べきの定理の中身である。

$x = 3, 4$ 、積は24（11番と一致）

32

融合：場合の数（数A）×式と証明（数II） | 二項定理の一般項で係数を求める

$(2x - 1)^5$ の展開における x^3 の係数を、二項定理の一般項 ${}_5C_r(2x)^{5-r}(-1)^r$ を使って求めよ。

$$x^3 \text{ の係数} = \underline{80}$$

x^3 の項は $5 - r = 3$ 、すなわち $r = 2$ のとき。

$${}_5C_2(2x)^3(-1)^2 = 10 \times 8x^3 \times 1 = 80x^3$$

80

33

式と証明（数II） | 因数分解を割り算として実行する

$x^3 - 8$ を $x - 2$ で割った商と余りを、実際に割り算を実行して求めよ。

$$\text{商の } x \text{ の係数} = \underline{2} \quad \text{余り} = \underline{0}$$

筆算で割ると、 $x^3 - 8 = x^3 + 0x^2 + 0x - 8$ を $x - 2$ で割り、商は $x^2 + 2x + 4$ 、余りは0。

これは13番の因数分解 $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ と対応している。余りが0ということは、 $x - 2$ がぴったり割り切れる（ $x = 2$ が方程式 $x^3 - 8 = 0$ の解である）ことを意味する。

商 $x^2 + 2x + 4$ 、余り0

330° （数Iの範囲外の角）について、単位円を用いて $\sin 330^\circ$, $\cos 330^\circ$ を求めよ。

$$\sin 330^\circ = \underline{-1/2} \quad \cos 330^\circ = \underline{\sqrt{3}/2}$$

$330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$ なので、単位円上で x 軸の正の方向から時計回りに 30° の位置にある。第4象限の角で、基準角は 30° 。

第4象限では $\cos$ は正、 $\sin$ は負なので

$$\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ として、 2^{10} の桁数を数IIの常用対数を使って求め、15番で実際に計算した桁数と一致することを確認せよ。

$$\log_{10} 2^{10} = \underline{3.01} \quad \text{桁数} = \underline{4}$$

$$\log_{10} 2^{10} = 10 \log_{10} 2 = 10 \times 0.3010 = 3.010$$

これは「 2^{10} は 10^3 以上 10^4 未満」を意味するので、桁数は $3 + 1 = 4$ 桁。15番で実際に $2^{10} = 1024$ と計算した結果（4桁）と一致する。

$$\log_{10} 2^{10} = 3.010、\text{桁数は4桁}$$

16番の3組のデータ $(2, 3), (4, 7), (6, 11)$ について、数Iの共分散の定義 $s_{xy} = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ を使って共分散 s_{xy} を求めよ。

$$s_{xy} = \underline{16/3}$$

$$\bar{x} = \frac{2+4+6}{3} = 4, \quad \bar{y} = \frac{3+7+11}{3} = 7$$

x の偏差: $-2, 0, 2$ 、 y の偏差: $-4, 0, 4$

偏差の積: $8, 0, 8$ 、和は16

$$s_{xy} = \frac{16}{3}$$

$$s_{xy} = \frac{16}{3}$$

17番で求めた $x = 3$ 上の点 $(3, t)$ が、実際に $A(0, 0)$ と $B(6, 0)$ から等しい距離にあることを確かめる。 $t = 4$ のとき、 PA 、 PB の値をそれぞれ求めよ。

$$PA = \underline{5} \quad PB = \underline{5}$$

$P(3, 4)$ として

$$PA = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$PB = \sqrt{(3-6)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

t にどんな値を入れても $PA = PB$ が成り立つ（一般に $PA^2 = 9 + t^2$ 、 $PB^2 = 9 + t^2$ で t によらず一致する）。これで「 $x = 3$ ならば等距離」という向き（十分条件）も確認できた。

$$PA = PB = 5$$

18番の計算で使った $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ の値を、数Bの公式 $\sum_{k=1}^n k =$

$\frac{1}{2}n(n+1)$ に $n = 6$ を代入して求め、直接足し算した値と一致することを確認せよ。

$$\sum_{k=1}^6 k = \underline{21}$$

$$\sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{2} \times 6 \times 7 = 21$$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ と直接計算した値と完全に一致する。

21

19番の四角形で $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 150^\circ$ について、 $\sin A$ と $\sin C$ の値をそれぞれ求め、両者が等しいことを確認せよ。

$$\sin A = \underline{1/2} \quad \sin C = \underline{1/2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

一般に $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ が成り立つので、円に内接する四角形の対角どうしは、大きさは違ってもsinの値がつねに等しくなる。これが正弦定理を四角形の外接円に応用できる理由である。

$$\sin A = \sin C = \frac{1}{2}$$

20番の直線 $3x + 2y = 12$ の傾きと、 x 切片・ y 切片を求めよ。

傾き = $-\frac{3}{2}$ x 切片 = 4 y 切片 = 6

$2y = -3x + 12$ より $y = -\frac{3}{2}x + 6$ 。傾きは $-\frac{3}{2}$ 、 y 切片は6。

x 切片は $y = 0$ を代入して $3x = 12$, $x = 4$ 。

20番の格子点 $(2, 3)$ は、この直線上にある無数の点のうち、 x, y がともに正の整数になる特別な点だった。

傾き $-\frac{3}{2}$ 、 x 切片4、 y 切片6

命題「実数 x, y, z について、 $x + y + z > 3$ ならば、 x, y, z の少なくとも1つは1より大きい」の対偶は「 $x \leq 1$ かつ $y \leq 1$ かつ $z \leq 1$ ならば $x + y + z \leq \boxed{?}$ である」となる。空欄に入る数を求めよ。

空欄 = 3

「少なくとも1つは1より大きい」の否定は「すべて1以下」、「 $x + y + z > 3$ 」の否定は「 $x + y + z \leq 3$ 」。

対偶は「 $x \leq 1$ かつ $y \leq 1$ かつ $z \leq 1$ ならば $x + y + z \leq 3$ 」。25番と同じ「差をとって0以下を示す」型で、 $(x - 1) + (y - 1) + (z - 1) \leq 0$ より $x + y + z \leq 3$ が示せる。2変数（5番・25番）が3変数に増えても、証明の骨組みは変わらない。

3

$x > 0$ のとき、 $k(x) = 2x + \frac{8}{x}$ の最小値を (a) 相加平均・相乗平均の関係、(b) 平方の非負性を使った変形、それぞれで求めよ。

最小値 = 8 そのときの $x =$ 2

(a) $2x > 0, \frac{8}{x} > 0$ で積は $2x \times \frac{8}{x} = 16$ (一定) なので

$$2x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{2x \times \frac{8}{x}} = 2\sqrt{16} = 8$$

等号は $2x = \frac{8}{x}$ 、すなわち $x^2 = 4, x > 0$ より $x = 2$ 。

(b) どんな実数も2乗すれば0以上になることを使う。 $\left(\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{8}{x}}\right)^2 \geq 0$ を展開すると

$$2x - 2\sqrt{2x \times \frac{8}{x}} + \frac{8}{x} \geq 0$$

$$2x + \frac{8}{x} \geq 2\sqrt{16} = 8$$

等号は $\sqrt{2x} = \sqrt{\frac{8}{x}}$ のとき、すなわち (a) と同じく $x = 2$ のとき成り立つ。2乗が0以上になるという事実だけから、同じ不等式を導くことができる。

最小値8 ($x = 2$ のとき)

43

融合：数と式（数I）×式と証明（数II） | 剰余の定理で割り算せずに余りを求める

$x^3 - 8$ を $x - 3$ で割った余りを、実際に割り算をせず、数IIの剰余の定理を使って求めよ。

余り = 19

剰余の定理より、 $P(x)$ を $x - 3$ で割った余りは $P(3)$ そのものである。 $P(x) = x^3 - 8$ として

$$P(3) = 27 - 8 = 19$$

数Iまでは実際に割り算をするしかなかったが、数IIの剰余の定理を使えば代入するだけで余りが求まる。

19

44

融合：確率（数A）×数列（数B） | Σ の公式で2乗の期待値を求める

1個のさいころを1回投げるとき出る目の2乗の期待値 $E(X^2)$ を、数Bの公式

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (n=6) \text{ を使って求めよ。}$$

$$\sum_{k=1}^6 k^2 = \underline{91} \quad E(X^2) = \underline{91/6}$$

$$\sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{1}{6} \times 6 \times 7 \times 13 = 91$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{91}{6}$$

$$\sum k^2 = 91, E(X^2) = \frac{91}{6}$$

直線 $3x + 2y = 12$ 上にあり x, y が整数である点のうち、原点にいちばん近いものを調べたい。まず数IIの点と直線の距離の公式で、原点からこの直線までの距離を求めよ。さらに、直線上の整数点 $(0, 6), (2, 3), (4, 0)$ のうち、原点からの距離がいちばん小さいものを選ぶ。

直線までの距離 = $12\sqrt{13}/13$ 最も近い点の x 座標 = 2

直線を $3x + 2y - 12 = 0$ の形にして、点と直線の距離の公式 $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ に原点 $(0, 0)$ を代入する。

$$\text{距離} = \frac{|3 \times 0 + 2 \times 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{13}}{13} \quad (\approx 3.33)$$

候補の点までの距離は、 $(0, 6)$ が6、 $(2, 3)$ が $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \quad (\approx 3.61)$ 、 $(4, 0)$ が4。実数の範囲での最短距離 ≈ 3.33 にいちばん近いのは $(2, 3)$ であり、これは20番で求めた格子点そのものである。

$$\text{距離} \frac{12\sqrt{13}}{13}, \text{最も近い整数点は}(2, 3)$$

46

融合：2次関数（数I）×微分法（数II） | 頂点が動く関数を場合分けで解く

$h(x) = x^2 - 2tx + t^2 + 3$ (t は定数) は $(x - t)^2 + 3$ と平方完成でき、区間 $0 \leq x \leq 2$ における最小値は t の値によって場合分けが必要になる。 $t = -1, 1, 3$ のときの最小値を、それぞれ求めよ。

$t = -1$ のとき 4 $t = 1$ のとき 3 $t = 3$ のとき 4

頂点は $(t, 3)$ 。微分すると $h'(x) = 2x - 2t$ で、 $h'(x) = 0$ となるのも $x = t$ ——平方完成の頂点と微分の極小点は常に一致する。

場合分け：頂点の x 座標 t が区間 $[0, 2]$ の左・内・右のどこにあるかで最小値の場所が変わる。

$t < 0$ のとき、区間内で $h(x)$ は単調増加なので最小値は $x = 0 : h(0) = t^2 + 3$ 。 $t = -1$ なら $h(0) = 1 + 3 = 4$ 。

$0 \leq t \leq 2$ のとき、頂点が区間内にあるので最小値は $x = t$ ：そのまま3。 $t = 1$ なら最小値3。

$t > 2$ のとき、区間内で単調減少なので最小値は $x = 2 : h(2) = 4 - 4t + t^2 + 3 = (t - 2)^2 + 3$ 。 $t = 3$ なら $(3 - 2)^2 + 3 = 4$ 。

$t = -1$ のとき4、 $t = 1$ のとき3、 $t = 3$ のとき4

22番の長方形の面積 $S(\theta) = 6 \sin \theta \times 6 \cos \theta$ を、2倍角の公式を使って $S(\theta) = 18 \sin 2\theta$ の形に整理し、面積が最大になる θ と最大値を求めよ。さらに、それが22番で周の長さが最大になった θ と一致するかを確認せよ。

$$\theta = \underline{\pi/4} \quad \text{面積の最大値} = \underline{18}$$

$S(\theta) = 36 \sin \theta \cos \theta$ 。2倍角の公式 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ より $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ なので

$$S(\theta) = 36 \times \frac{1}{2} \sin 2\theta = 18 \sin 2\theta$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $0 < 2\theta < \pi$ で、 $\sin 2\theta$ が最大の1になるのは $2\theta = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ 。

面積の最大値は18。これは22番で周の長さが最大になった $\theta = \frac{\pi}{4}$ と完全に一致する——縦と横の係数がどちらも6で等しいこの長方形は、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき正方形になり、周も面積も同時に最大になる。

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき面積の最大値18（周が最大になる角と一致）

3番・23番の $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ を使って、 $\sum_{k=1}^3 p_k = p_1 + p_2 + p_3$ の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^3 p_k = \underline{\underline{37/27}}$$

$p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{5}{9}, p_3 = \frac{13}{27}$ (3番・23番で求めた値)。通分すると $\frac{9}{27}, \frac{15}{27}, \frac{13}{27}$ 。

$$\sum_{k=1}^3 p_k = \frac{9 + 15 + 13}{27} = \frac{37}{27}$$

$$\frac{37}{27}$$

24番で求めた $E(X) = \frac{5}{6}, V(X) = \frac{25}{36}$ を使って、公式 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ から $E(X^2)$ の値を求めよ。

$$E(X^2) = \underline{\underline{25/18}}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{より}$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = \frac{25}{36} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} + \frac{25}{36} = \frac{50}{36} = \frac{25}{18}$$

$$E(X^2) = \frac{25}{18}$$

すべての自然数 n について $5^n - 4n - 1$ が16の倍数であることを、数学的帰納法で証明する。 $n = k$ のとき $5^k - 4k - 1 = 16m$ と仮定すると $5^{k+1} - 4(k+1) - 1 = 5(5^k - 4k - 1) + \boxed{\text{ア}}k$ の形に変形できる。アに入る数と、 $n = 4$ のときの $5^n - 4n - 1$ の値を求めよ。

ア = 16 $n = 4$ のとき = 608

$$5^{k+1} - 4(k+1) - 1 = 5 \times 5^k - 4k - 5 = 5(5^k - 4k - 1) + 5(4k + 1) - 4k - 5 = 5(5^k - 4k - 1) + 20k + 5 - 4k - 5 = 5(5^k - 4k - 1) + 16k$$

よってア=16。仮定より $5(5^k - 4k - 1) + 16k = 5 \times 16m + 16k = 16(5m + k)$ となり、16の倍数。 $n = 1$ のとき $5 - 4 - 1 = 0$ （ 16×0 で成り立つ）とあわせて、すべての自然数 n で成り立つ。

$n = 4$ のとき実際に計算すると $5^4 - 4 \times 4 - 1 = 625 - 16 - 1 = 608 = 16 \times 38$ 。

ア=16、 $n = 4$ のとき608

7番・27番のデータの標準偏差 s を求めよ。さらに、5人のうち得点が平均から標準偏差1つ分以上離れている（ $|x_i - 7| \geq s$ を満たす）人数を求めよ。

標準偏差 = 2 人数 = 2

分散 $V(X) = 4$ （27番）なので標準偏差 $s = \sqrt{4} = 2$ 。

5人の得点4, 6, 7, 8, 10について、平均7からの偏差の絶対値は3, 1, 0, 1, 3。このうち2以上なのは得点4（偏差3）と得点10（偏差3）の2人。

標準偏差2、該当する人数は2人

8番・28番の三角形ABCの面積を、(a)数Iの公式 $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A$ 、(b)頂点の座標を使った数IIの公式 $S = \frac{1}{2} |x_B y_C - x_C y_B|$ （Aが原点のとき）、それぞれで求めて一致することを確認せよ。

面積 = $35\sqrt{3}/4$

$$(a) S = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 35 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{4}$$

$$(b) A(0,0), B(5,0), C\left(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right) \text{ (28番) なので}$$

$$S = \frac{1}{2} \left| 5 \times \frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{2} \times 0 \right| = \frac{1}{2} \times \frac{35\sqrt{3}}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{4}$$

どちらの方法でも $\frac{35\sqrt{3}}{4}$ で一致する。角度の情報から直接計算する数Iの方法と、座標にしてから計算する数IIの方法は、それぞれ別の場面で使い分けると便利である。

面積 $\frac{35\sqrt{3}}{4}$

9番・29番の方程式 $x^2 - 4x + 7 = 0$ の2つの解 $2 + \sqrt{3}i$, $2 - \sqrt{3}i$ について、解の和と積を求め、数IIの解と係数の関係（ $x^2 - 4x + 7 = 0$ の係数から直接分かる値）と一致することを確認せよ。

解の和 = 4 解の積 = 7

解と係数の関係より、 $x^2 - 4x + 7 = 0$ の2解の和は $-\frac{-4}{1} = 4$ 、積は $\frac{7}{1} = 7$ であるはずである。

実際に計算すると

$$\text{和：}(2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = 4$$

$$\text{積：}(2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) = 4 - (\sqrt{3}i)^2 = 4 - (-3) = 7$$

複素数の解であっても、解と係数の関係は実数解のときと同じ形で成り立つ。

和4、積7（係数から直接求めた値と一致）

11番・31番で求めた方べきの値24を使って、点 $P(7, 0)$ から円 $x^2 + y^2 = 25$ に引いた接線の長さPTを求めよ（接線の長さの公式 $PT^2 = PO^2 - r^2$ を、方べきの値と結びつけて使う）。

PT = $2\sqrt{6}$

方べきの定理は、割線でも接線でも同じ値になる。接線の場合は2つの交点が重なって接点1つになるので、 $PA \times PB$ の代わりに $PT \times PT = PT^2$ となる。

$$PT^2 = PO^2 - r^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24 \quad (11\text{番の値と完全に一致})$$

$$PT = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$PT = 2\sqrt{6}$$

二項定理で $a = b = 1$ を代入すると $\sum_{r=0}^n {}_nC_r = 2^n$ が成り立つ。これは数Aで学ぶ

「 n 個の要素をもつ集合の部分集合の総数は 2^n 個」という事実と同じものである。

$n = 6$ のとき、 $\sum_{r=0}^6 {}_6C_r$ の値を求めよ。

値 = 64

$$(1+1)^6 = \sum_{r=0}^6 {}_6C_r 1^{6-r} 1^r = \sum_{r=0}^6 {}_6C_r \text{なので、求める値は } 2^6 = 64.$$

これは、6個の要素をもつ集合について、「0個選ぶ場合」「1個選ぶ場合」……「6個すべて選ぶ場合」の総数をすべて足すと、部分集合の総数 $2^6 = 64$ 個と一致する、という数Aの事実そのものである。

64

数Iでは $\sin \theta = \frac{1}{2}$ を満たす角は $0^\circ \sim 180^\circ$ の範囲で $30^\circ, 150^\circ$ の2つしかなかった。

数IIの一般角では、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲でこの方程式を満たす θ をすべて求めよ。

$\theta =$ $\pi/6, 5\pi/6$

単位円上で y 座標が $\frac{1}{2}$ になる点は2つあり、それぞれ $\theta = \frac{\pi}{6}$ (30°) と $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (150°) に対応する。

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲ではこの2つだけ。数Iで習った $30^\circ, 150^\circ$ を、ラジアンで言い換えただけである（もし範囲を全実数に広げれば、 $\theta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ や $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ (n は整数) と無数に増える)。

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$\log_{10} 2 = 0.3010$ として 2^{20} の桁数を求めよ。さらに、数Aの整数の性質を使って 2^{20} の正の約数の個数を求めよ。

桁数 = 7 約数の個数 = 21

$\log_{10} 2^{20} = 20 \times 0.3010 = 6.02$ 。これは 10^6 以上 10^7 未満を意味するので、桁数は $6 + 1 = 7$ 桁。

約数の個数は、素因数分解 2^{20} （素因数は2だけ）から、指数0から20までの $20 + 1 = 21$ 通りの選び方があるので21個。

桁数7桁、約数の個数21個

16番・36番のデータについて、 x の分散、 y の分散をそれぞれ求め、相関係数の公式 $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ を使って相関係数 r を求めよ。

$$x \text{ の分散} = \underline{8/3} \quad y \text{ の分散} = \underline{32/3} \quad \text{相関係数 } r = \underline{1}$$

x の偏差 $-2, 0, 2$ の2乗和は $4 + 0 + 4 = 8$ なので分散 $= \frac{8}{3}$ 。

y の偏差 $-4, 0, 4$ の2乗和は $16 + 0 + 16 = 32$ なので分散 $= \frac{32}{3}$ 。

$$s_x = \sqrt{\frac{8}{3}}, s_y = \sqrt{\frac{32}{3}} \text{なので } s_x s_y = \sqrt{\frac{8}{3} \times \frac{32}{3}} = \sqrt{\frac{256}{9}} = \frac{16}{3}。$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{16/3}{16/3} = 1$$

ここで相関係数が最大の1になったのは偶然ではない。16番で確かめたとおり、この3点は直線 $y = 2x - 1$ の上に完全に乗っている。相関係数は「点が右上がりの直線にどれだけ近いか」を -1 から 1 までの数で表したもののなので、ずれが1つも無い場合はちょうど1になる。

つまり、図形と方程式で「3点が一直線上にある」ということと、データの分析で「相関係数が1である」ということは、同じ状態を別の言葉で述べている。逆に点が直線から散らばるほど r は1から離れていく。

$$x \text{ の分散 } \frac{8}{3}, y \text{ の分散 } \frac{32}{3}, \text{ 相関係数 } r = 1$$

「点 (x, y) が円 $x^2 + y^2 = 25$ 上にあり、かつ直線 $x = 3$ 上にある」を満たす点をすべて求めよ。

y 座標（2つ、コンマ区切り） = 4,-4

$x = 3$ を円の式に代入すると

$$9 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 16$$

$$y = \pm 4$$

よって条件を満たす点は $(3, 4)$ と $(3, -4)$ 。17番・37番で調べた「 $x = 3$ 上のすべての点」のうち、さらに「円上にもある」という条件を追加すると、無数にあった候補が2点にまで絞られる。

点 $(3, 0)$ は円の内部の点（ $3^2 + 0^2 = 9 < 25$ ）である。この点を通る2本の弦、 $x = 3$ （交点 $(3, 4)$ と $(3, -4)$ ）と x 軸（交点 $(-5, 0)$ と $(5, 0)$ ）について、点から各交点までの距離の積を比べると、 $x = 3$ 側は $4 \times 4 = 16$ 、 x 軸側は $|3 - (-5)| \times |5 - 3| = 8 \times 2 = 16$ で一致する。11番では円の外部の点で成り立っていた方べきの定理が、内部の点でも同じ値で成り立つことが確認できる。

$(3, 4), (3, -4)$

19番・39番の四角形 $ABCD$ の一部である $\triangle ABD$ において、 $BD = 5$, $\angle A = 30^\circ$ のとき、正弦定理を使って外接円の半径 R を求めよ（この外接円は四角形 $ABCD$ の外接円と同じ円である）。

$$R = \underline{5}$$

$$\text{正弦定理} \frac{BD}{\sin A} = 2R \text{より}$$

$$2R = \frac{5}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{1/2} = 10$$

$$R = 5$$

$\triangle ABD$ は、四角形 $ABCD$ が内接しているのと同じ円に内接しているので、この R は四角形全体の外接円の半径でもある。円に内接する図形なら、どの三角形を選んで正弦定理を使っても、同じ外接円の半径にたどり着く。

$R = 5$ は、11番・31番・59番で使ってきた円 $x^2 + y^2 = 25$ （半径 $\sqrt{25} = 5$ 、中心は原点）の半径と同じ値である。正弦定理という数I・Aの道具で求めた外接円の半径が、数IIの図形と方程式で扱う円の方程式の半径とちょうど一致するように、この四角形はもともと設計されている。

$$R = 5$$

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

実際の共通テストにならい、大問1・2は数学I・Aの範囲、大問3～5は数学II・Bの範囲から出題する。全5大問・目標70分・配点100点。

大問1 目標時間 14分／配点 20点

文化祭で模擬店を出す太郎さんと花子さんが、たこ焼き店の運営について相談している。1皿300円で売ると1日80皿売れる見込みだが、値上げすると売れる数が減ることが分かっている。値上げ額を10円増やすごとに売れる数が2皿減ると予想されるとき、値上げ額を x 円とすると、1日の売上 y 円は $y = -0.2x^2 + 20x + 24000$ と表せる。

太郎「値上げしすぎても、しなさすぎても売上は下がりそうだね。」

花子「じゃあ、売上がいちばん高くなる値上げ額を計算してみよう。」

- (1) 売上 y を平方完成すると $y = -0.2(x - \boxed{\text{アイ}})^2 + \boxed{\text{ウエオカキ}}$ となる。売上が最大になる値上げ額は $\boxed{\text{アイ}}$ 円、そのときの売上は $\boxed{\text{ウエオカキ}}$ 円である。

アイ 50 ウエオカキ 24500

$$y = -0.2x^2 + 20x + 24000 = -0.2(x^2 - 100x) + 24000 = -0.2\{(x - 50)^2 - 2500\} + 24000 = -0.2(x - 50)^2 + 500 + 24000 = -0.2(x - 50)^2 + 24500$$

頂点は(50, 24500)なので、値上げ額50円のととき売上は最大の24500円になる。

値上げ額50円、最大の売上24500円

(2)

花子「(1)で求めた、値上げ額50円の時売上が最大になった日を『特別営業日』にしよう。値上げ額10円につき1人ずつ声をかけたら、ちょうど $50 \div 10 = 5$ 人をお願いできそうだね。」太郎「じゃあ、その5人の部員から3人を選んで担当してもらおう。選んだ3人には受付・呼び込み・会計の3つの異なる役割を割り振るよ。」5人から3人を選ぶ選び方は **クケ** 通り、選んだ3人に3つの異なる役割を割り振る方法は全部で **コサ** 通りである。

クケ 10 コサ 60

5人から3人を選ぶ選び方は ${}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ 通り。

選んだ3人を3つの異なる役割に割り振る方法は $3! = 6$ 通りずつあるので、全体では $10 \times 6 = 60$ 通り (${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ 通りと計算しても同じ)。

選び方10通り、役割の割り振り方60通り

(3)

太郎「(1)で求めた値上げ額50円（1皿350円）の時、1日に売れる皿数は $80 - 0.2 \times 50 = 70$ 皿と計算できるね。その値段で売り始めてから、実際の来場者数を1週間分記録してみたよ。」値上げ後7日間の来場者数（人）は 45, 52, 48, 60, 55, 50, 58 であった。このデータの中央値は **シス** 人、四分位範囲（第3四分位数と第1四分位数の差）は **セソ** 人である。

シス 52 セソ 10

小さい順に並べると 45, 48, 50, 52, 55, 58, 60（7個）。中央値は真ん中の4番目、52人。

下位3個 45, 48, 50 の中央値である第1四分位数は 48 人。上位3個 55, 58, 60 の中央値である第3四分位数は 58 人。

四分位範囲は $58 - 48 = 10$ 人。

中央値52人、四分位範囲10人

太郎さんと花子さんは、学校の中庭にある三角形の花壇ABCの周りにレンガを敷き詰める計画を立てている。花壇は $AB = 5\text{ m}$, $AC = 8\text{ m}$, $\angle A = 60^\circ$ である。

花子「まず、残りの辺BCの長さを求めよう。」

- (1) 余弦定理より $BC = \boxed{\text{ア}}$ mである。さらに正弦定理より、この三角形の外接円の半径は $R = \frac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ mである。

ア 7 イ 7 ウ 3 エ 3

余弦定理より

$$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 60^\circ = 25 + 64 - 40 = 49$$

$$BC = 7$$

正弦定理より $\frac{BC}{\sin A} = 2R$ なので

$$2R = \frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{7}{\sqrt{3}/2} = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$BC = 7\text{ m}, R = \frac{7\sqrt{3}}{3}\text{ m}$$

- (2) 花子「レンガは正方形で、3辺すべてにちょうど敷き詰めたいな。」太郎「じゃあ、3辺の長さの最大公約数を考えればいいね。」 $AB = 5\text{ m} = 500\text{ cm}$, $AC = 8\text{ m} = 800\text{ cm}$, $BC = 7\text{ m} = 700\text{ cm}$ とすると、3辺すべてを割り切る最大の正方形の1辺の長さは $\boxed{\text{オカキ}}$ cmである。

オカキ 100

$500 = 2^2 \times 5^3$, $800 = 2^5 \times 5^2$, $700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$ 。共通する素因数は $2^2 \times 5^2 = 100$ 。

最大公約数は100。

100 cm

- (3) 1辺100 cmのレンガを敷き詰めるとき、AB, AC, BCの各辺に並ぶレンガの個数はそれぞれ ク 個、ケ 個、コ 個で、周に並ぶレンガの総数は サシ 個である。

ク 5 ケ 8 コ 7 サシ 20

AB : $500 \div 100 = 5$ 個、AC : $800 \div 100 = 8$ 個、BC : $700 \div 100 = 7$ 個。

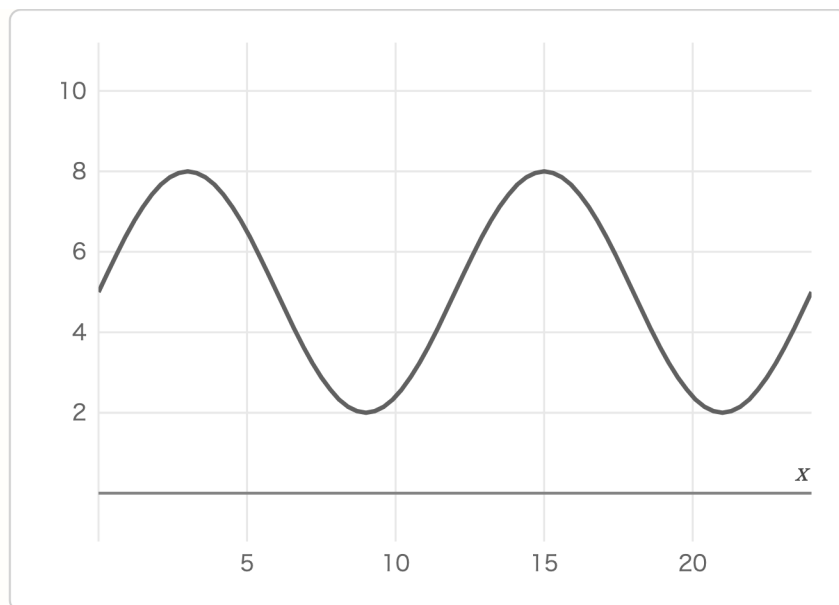
合計 $5 + 8 + 7 = 20$ 個。

5, 8, 7 個、合計 20 個

大問3 目標時間 14分/配点 20点

太郎さんと花子さんは、ある港での時刻 t 時 ($0 \leq t < 24$) における海面の高さ $h(t)$ (m) が、 $h(t) = 3 \sin \frac{\pi}{6} t + 5$ で近似できることを知り、船がいつ入港できるかを調べている (潮の満ち引きはおよそ12時間周期である)。

花子「 $t = 0$ のとき $h(0) = 5$ 。まずはほかの時刻での高さも計算してみよう。」



時刻 t （時）と海面の高さ $h(t)$ （m）の関係。12時間でちょうど1周期する。

(1) $t = 3$ のときの海面の高さは $h(3) = \boxed{\text{ア}}$ mである。

ア 8

$$h(3) = 3 \sin \frac{\pi}{6} \times 3 + 5 = 3 \sin \frac{\pi}{2} + 5 = 3 \times 1 + 5 = 8$$

$$h(3) = 8 \text{ m}$$

(2) 太郎「この港に船が入るには、海面の高さが6.5 m以上必要なんだ。」花子「(1)で求めた $h(3) = 8 \text{ m}$ は6.5 m以上だから、 $t = 3$ の前後は入港できそうだね。ちょうど何時から何時まで入港できるか、範囲を求めてみよう。」 $0 \leq t < 12$ の範囲で $h(t) \geq 6.5$ となる t の範囲を求めると、 $\boxed{\text{イ}} \leq t \leq \boxed{\text{ウ}}$ である。

イ 1 ウ 5

$3 \sin \frac{\pi}{6}t + 5 \geq 6.5$ より $\sin \frac{\pi}{6}t \geq \frac{1}{2}$ 。 $\theta = \frac{\pi}{6}t$ とおくと、 $0 \leq t < 12$ のとき $0 \leq \theta < 2\pi$ 。 $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ となるのは $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ （56番と同じ角）のときなので

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}t \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$1 \leq t \leq 5$$

$$1 \leq t \leq 5$$

(3)

花子「1日（24時間）のうち、海面が6.5 m以上である時間の合計は何時間かな。」周期は12時間なので、24時間の間に同じパターンが2回くり返される。海面が6.5 m以上である時間の合計は エ 時間である。

エ 8

(2)より、1つの周期（12時間）の中で条件を満たすのは $1 \leq t \leq 5$ の4時間。周期は12時間で、24時間にはこの周期がちょうど2回含まれるので

$$4 \times 2 = 8 \text{ (時間)}$$

8時間

大問4 目標時間 14分／配点 20点

ある工場での1日の生産量を x 個としたときの利益 $P(x)$ （万円）は、 $P(x) = -x^3 + 30x^2 - 900$ ($0 \leq x \leq 30$) で表されるという。太郎さんと花子さんは、利益を最大にする生産量を調べている。

太郎「微分して増減表をつくれれば、最大値が求まりそうだね。」

(1)

$P'(x)$ を求めると $P'(x) = -3x(x - \text{アイ})$ となる。増減表をつくると、利益が最大になるのは $x = \text{ウエ}$ のときで、そのときの利益は オカキク 万円である。

アイ 20 ウエ 20 オカキク 3100

$$P'(x) = -3x^2 + 60x = -3x(x - 20)。$$

$0 < x < 20$ で $P'(x) > 0$ （増加）、 $20 < x \leq 30$ で $P'(x) < 0$ （減少）なので、 $x = 20$ で最大。

$$P(20) = -8000 + 30 \times 400 - 900 = -8000 + 12000 - 900 = 3100$$

$x = 20$ 個のとき、利益は最大の3100万円

(2)

花子「来月は、1日目の生産量を5個にして、そこから毎日1個ずつ増やしていく予定なんだ。」これは初項5、公差1の等差数列である。30日間の生産量の合計は ケコサ 個である。

ケコサ 585

初項 $a_1 = 5$ 、公差 $d = 1$ 、項数 $n = 30$ の等差数列の和は

$$S_{30} = \frac{30}{2} \{2 \times 5 + (30 - 1) \times 1\} = 15 \times (10 + 29) = 15 \times 39 = 585$$

585個

(3)

太郎「日々の生産量が、(1)で求めた最大利益を出す生産量20個を初めて超えるのは何日目かな。」 n 日目の生産量は $a_n = 5 + (n - 1)$ 個である。これが20個を初めて超える日は シス 日目である。

シス 17

$a_n = n + 4$ 。 $a_n > 20$ より $n + 4 > 20$, $n > 16$ なので、初めて超えるのは $n = 17$ ($a_{17} = 21$)。 $a_{16} = 20$ はちょうど20個で「超えて」はいないことに注意する。

17日目

大問5 目標時間 14分/配点 20点

あるお菓子工場で作るクッキー1枚の重さは、平均50 g、標準偏差2 gの正規分布に従うという。太郎さんと花子さんは、この分布を使って重さのばらつきを調べている。標準正規分布表の値として、 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$, $P(0 \leq Z \leq 2) =$

0.4772を用いてよい。

花子「重さを標準化して、標準正規分布の表を使おう。」

- (1) クッキー1枚の重さが52 g以上54 g未満である確率を求めると0. アイウエ である。

アイウエ 1359

52 gを標準化すると $Z = \frac{52 - 50}{2} = 1$ 、54 gを標準化すると $Z = \frac{54 - 50}{2} = 2$ 。

$$P(1 \leq Z < 2) = P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

0.1359

- (2) 太郎「(1)で調べたのは1枚ごとの重さのばらつきだったね。今度は1箱に36枚入りのクッキーを詰めるとき、1箱の重さの合計の期待値と分散を求めよう。」1枚の重さの期待値50 g、分散4（標準偏差2の2乗）を使うと、独立な36枚の重さの合計の期待値は オカキク g、分散は ケコサ である。

オカキク 1800 ケコサ 144

独立な確率変数の和の期待値・分散の性質より

期待値： $36 \times 50 = 1800$ (g)

分散： $36 \times 4 = 144$

期待値1800 g、分散144

- (3) 花子「合計の重さについて、標準偏差を求めて、平均から標準偏差1つ分の範囲を求めてみよう。」標準偏差は シス gで、平均から標準偏差1つ分の範囲は セソタチ g以上 ツテトナ g以下である。

シス 12 セソタチ 1788 ツテトナ 1812

標準偏差は $\sqrt{144} = 12$ (g)。

範囲は $1800 - 12 = 1788$ (g) 以上 $1800 + 12 = 1812$ (g) 以下。

標準偏差12 g、範囲は1788 g以上1812 g以下

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。2科目にまたがる論証に挑戦しよう。

- 記1** 2次方程式 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ (a は実数の定数) が異なる2つの実数解をもつような a の値の範囲を、数Iの判別式を用いて求めよ。さらに、その範囲に含まれない $a = 0$ の場合について、方程式を数IIの複素数の範囲で解き、実数解をもたない理由を判別式の符号と関連づけて説明せよ。

判別式の $\frac{D}{4}$ を計算すると

$$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \times (a + 2) = a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1)$$

異なる2つの実数解をもつのは $D > 0$ のときなので $(a - 2)(a + 1) > 0$ 、これを解くと $a < -1$ または $a > 2$ 。

この範囲に含まれない値として $a = 0$ を考える。このとき $\frac{D}{4} = (0 - 2)(0 + 1) = -2 < 0$ であり、実数解をもたない範囲に入っていることが判別式から確認できる。

実際に $a = 0$ を方程式に代入すると $x^2 + 2 = 0$ 、すなわち $x^2 = -2$ となる。実数の範囲では2乗して負になる数は存在しないので実数解はないが、数IIで学ぶ複素数の範囲まで考えれば、 $i^2 = -1$ を使って $x = \pm\sqrt{2}i$ という2つの解が存在する。

つまり判別式が負であることは「実数の範囲に解がない」ことを意味しているだけであり、数Iではそこで話が終わっていた。数IIで複素数という新しい数の世界を手に入れることで、判別式の符号にかかわらず、2次方程式には常に2つの解（実数または虚数）が存在すると言えるようになる。

$a < -1$ または $a > 2$ のとき異なる2つの実数解をもつ。 $a = 0$ のときは $D < 0$ で実数解はないが、複素数の範囲では $x = \pm\sqrt{2}i$ という解が存在する。

記2 1個のさいころを4回投げて、5以上の目（5または6）が出る回数を確率変数 X とする。(a)数Aの反復試行の確率の公式を使って、 $X = 2$ である確率を求めよ。(b)数Bの二項分布の考え方を使って、 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を、公式 $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$ で求めよ。(c) (a)と(b)の結果をふまえ、「反復試行の確率の公式」と「二項分布」がどのような関係にあるかを説明せよ。

5以上の目（5か6）が出る確率は $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

(a) 4回中ちょうど2回だけ5以上の目が出る確率は、数Aの反復試行の確率の公式より

$$P(X = 2) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

(b) X は二項分布 $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ に従うので

$$E(X) = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$V(X) = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

(c) (a)の反復試行の確率の公式 ${}_nC_r p^r (1 - p)^{n-r}$ は、 n 回中 r 回だけ特定のことが起こる確率を1回ずつ数え上げて求めるための道具である。実はこの式は、確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うときの「 $X = r$ である確率」の定義そのものであり、数Aで学んだ計算は、数Bでは二項分布という1つの分布の一部分（ $r = 2$ のときの値）として位置づけ直される。

そして(b)の期待値・分散の公式 $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$ は、(a)のように毎回 r を決めて確率を1つずつ計算しなくても、「平均して何回くらい起こるか」「どれくらいばらつくか」という分布全体の傾向を、たった1本の式でまとめて表したものである。つまり、反復試行の確率の公式は二項分布の部品、期待値・分散の公式はその部品を集めた分布全体の要約という関係にある。

$P(X = 2) = \frac{8}{27}$, $E(X) = \frac{4}{3}$, $V(X) = \frac{8}{9}$ 。反復試行の確率の公式は二項分布の確率の定義そのものであり、期待値・分散の公式はその分布全体の傾向を要約したものである。

