

数III・C まとめテスト

問題プリント（全62問）

氏名 _____

得点 _____ / 62点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～25）

1

$|r| < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を求めよ。

極限值

2

分数式・最高次で割る

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-2}{3n+4}$ を求めよ。

極限值

3

約分

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ を求めよ。

極限值

4

sinの基本公式

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$ を求めよ。

極限值

5

積の微分・基本

$y = (2x-1)(x+3)$ を微分し、 $y'(2)$ の値を求めよ。

$y'(2) =$

6

商の微分

$y = \frac{x-4}{x+2}$ を微分し、 $y'(1)$ の値を求めよ。

$y'(1) =$

7

合成関数・基本

$y = (3x-1)^5$ を微分すると $y' = A(3x-1)^4$ の形になる。 A の値と $y'(1)$ の値を求めよ。

$A =$

$y'(1) =$

8

sin・cosの微分係数

$y = \sin x$ の $x = \frac{\pi}{6}$ における微分係数と、 $y = \cos x$ の $x = \frac{\pi}{3}$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

sin : $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

cos :

$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

9

$\ln x \cdot e^x$ の微分係数

$y = \ln x$ の $x = \frac{1}{3}$ における微分係数と、 $y = e^x$ の $x = 2$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

$\ln x$: $y'\left(\frac{1}{3}\right) =$

e^x :

$y'(2) =$

10

不定積分の基本公式（総合）

$\int \left(6x^2 - \frac{3}{x} + 4 \sin x \right) dx$ を求めよ（ C は省略してよい）。 x^3 の係数、 $\ln|x|$ の係数、 $\cos x$ の係数をそれぞれ求めよ。

x^3 の係数 $\ln|x|$ の係数
 $\cos x$ の係数

11

置換積分（べき乗型・定積分）

$\int_0^1 6x(x^2 + 1)^2 dx$ を求めよ。

値

12

部分積分（ $x \cdot e^x$ 型・定積分）

$\int_0^1 xe^{2x} dx$ を求めよ。

値

13

奇関数の性質

$\int_{-3}^3 (5x^3 - 2x) dx$ を求めよ。

値

14

ベクトルの成分計算

$\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (-1, 4)$ のとき、 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ を成分で求めよ。

x成分 y成分

15

内積の基本

$\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (2, -4)$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$

16

ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (3, 4)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

$|\vec{a}| =$

17

内分点

2点 $A(1, 2)$, $B(9, 10)$ を $3:1$ に内分する点の座標を求めよ。

x座標 y座標

18

重心

3点 $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(3, 9)$ の重心 G の座標を求めよ。

x座標 y座標

19

空間ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (1, 2, -2)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

$|\vec{a}| =$

20

放物線の焦点・準線

放物線 $y^2 = 8x$ の焦点のx座標と、準線の方程式（ $x =$ の右辺の値）を求めよ。

焦点のx座標 準線： $x =$

21

楕円の焦点

楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ の焦点のx座標（正の方の値）を求めよ。

焦点のx座標

22

双曲線の漸近線

双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ の漸近線の傾き（正の方の値）を求めよ。

傾き

23

極形式

複素数 $z = 1 + i$ の絶対値 $|z|$ と、偏角（度）を求めよ。

$|z| =$ 偏角 °

24 ド・モアブルの定理

$z = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ のとき、 z^3 の値（実数）を求めよ。

$$z^3 = \boxed{}$$

25 n 乗根の個数

方程式 $z^5 = 1$ （1の5乗根）を満たす複素数 z は何個あるか。

$$\text{個数 } \boxed{} \text{ 個}$$

標準 (26~50)

26 根号の有理化（数列）

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)$ を求めよ。

$$\text{極限值 } \boxed{}$$

27 2文字の係数決定

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 3} = 7$ が成り立つように定数 a, b の値を定めよ。

$$a = \boxed{} \quad b = \boxed{}$$

28 連続になるように定数を定める

次の関数が $x = 4$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & (x \neq 4) \\ a & (x = 4) \end{cases}$$

$$a = \boxed{}$$

29 対数微分法

$y = (x + 2)^4(x - 1)^3$ を対数微分法で微分し、 $y'(2)$ の値を求めよ。

$$y'(2) = \boxed{}$$

30 極値・3次関数

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ の極値を求めよ。

$$\begin{aligned} &\text{極大値 } \boxed{} \quad (x = \boxed{}) \\ &\text{極小値 } \boxed{} \quad (x = \boxed{}) \end{aligned}$$

31 接線・指数関数

曲線 $y = e^{2x}$ の $x = 0$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

$$\text{傾き } \boxed{} \quad y \text{ 切片 } \boxed{}$$

32 方程式の実数解の個数（増減表）

$f(x) = x^3 - 3x + k$ のグラフが x 軸と異なる3点で交わるように、定数 k の値の範囲を求めよ。

$$\text{下端} = \boxed{} \quad \text{上端} = \boxed{}$$

33 部分分数分解

$\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \frac{1}{A} \ln \left| \frac{x - 3}{x + 3} \right| + C$ の A を求めよ。

$$A = \boxed{}$$

34 半角公式（定積分）

$\int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx$ を求めよ。

$$\text{値 } \boxed{}$$

35 曲線の長さ

曲線 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 3$) の長さ L を求めよ。

$$L = \boxed{}$$

36 共線条件

3点 $A(1, 2)$, $B(4, 8)$, $C(k, 20)$ が一直線上にあるように、定数 k の値を求めよ。

$$k = \boxed{}$$

37 内積を用いた垂直条件

$\vec{a} = (x, 3)$, $\vec{b} = (4, -2)$ が垂直であるように、 x の値を求めよ。

$$x = \boxed{}$$

38

空間ベクトルの内積

$\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と、なす角 θ の $\cos \theta$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{} \quad \cos \theta = \boxed{}$$

39

外分点

2点 $A(2, 1)$, $B(8, 4)$ を $5:2$ に外分する点の座標を求めよ。

$$\text{x座標 } \boxed{} \quad \text{y座標 } \boxed{}$$

40

楕円の定義

楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上の点 P から2つの焦点 F, F' までの距離の和 $PF + PF'$ を求めよ。

$$PF + PF' = \boxed{}$$

41

極座標

極方程式 $r = 6 \cos \theta$ が表す図形は円である。この円の半径を求めよ。

$$\text{半径 } \boxed{}$$

42

複素数の回転

$z = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ を原点を中心に 90° 回転した複素数の絶対値と偏角（度）を求めよ。

$$\text{絶対値 } \boxed{} \quad \text{偏角 } \boxed{}^\circ$$

43

総合：媒介変数表示の曲線の長さ（線分）

媒介変数表示 $x = 2 + 3t$, $y = -1 + 4t$ ($0 \leq t \leq 2$) で表される線分の長さ L を、曲線の長さの公式を用いて求めよ。

$$L = \boxed{}$$

44

総合：媒介変数表示の微分（楕円）

楕円 $x = 3 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ 上の $\theta = \frac{\pi}{3}$ の

点における接線の傾き $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

$$\text{傾き } \boxed{}$$

45

総合：陰関数の微分と2次曲線

楕円 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(2, 1)$ における接線の傾きを、陰関数の微分で求めよ。

$$\text{傾き } \boxed{}$$

46

総合：空間ベクトルと微分

点 $A(1, 0, 0)$ から、直線上の点 $P(t) = (t, 2t, 2 - t)$ (t は実数) までの距離の2乗 $f(t) = AP^2$ を t の関数として表し、微分によって距離 AP が最小となる t の値と、そのときの $f(t)$ の値を求めよ。

$$t = \boxed{} \quad \text{最小値 } \boxed{}$$

47

総合：複素数と微分

$z = 3 \cos \theta + 4i \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) について、 $|z|^2$ を θ の関数として表し、微分を用いて $|z|$ の最大値を求めよ。

$$|z| \text{ の最大値 } \boxed{}$$

48

総合：媒介変数表示と微分

円 $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ 上の点の x 座標と y 座標の積 xy の最大値を、 θ による微分を用いて求めよ。

$$\text{最大値 } \boxed{}$$

49

総合：数列の極限とベクトル

ベクトル $\vec{a}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n} \right)$ について、 $n \rightarrow \infty$ のときの各成分の極限を求めよ。

$$\text{x成分の極限 } \boxed{} \quad \text{y成分の極限 } \boxed{}$$

50

総合：媒介変数表示の曲線の長さ（円）

円 $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の長さ L を、曲線の長さの公式で求めよ。

$$L = \boxed{}$$

発展 (51~60)

51 総合：極限×ベクトル×微分

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+3}$ とする。ベクトル $\vec{w} = (a, a^2)$ の大きさ $|\vec{w}|$ を求めよ。また、関数 $g(x) = x^2 - ax$ の最小値を求めよ。

$a = \boxed{}$ $|\vec{w}| = \boxed{}$
 $g(x)$ の最小値 $\boxed{}$ ($x = \boxed{}$)

52 総合：空間ベクトルと微分 (原点からの最短距離)

位置ベクトルで表される点 $P(t) = (1+t, 2-t, t)$ から原点までの距離の2乗 $f(t) = OP^2$ を t の関数として表し、微分を用いて $f(t)$ を最小にする t の値と、その最小値を求めよ。

$t = \boxed{}$ 最小値 $\boxed{}$

53 総合：2次曲線と接する条件 (判別式)

直線 $y = x + k$ が楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ に接するように、正の定数 k の値を求めよ。

$k = \boxed{}$

54 総合：複素数平面と微分 (速度)

複素数平面上を動く点 $z(t) = 2(\cos t + i \sin t)$ の実部 $x(t) = 2 \cos t$ について、 $\frac{dx}{dt}$ を求め、 $t = \frac{\pi}{3}$ における値を求めよ。

$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\pi/3} = \boxed{}$

55 総合：2次曲線と積分 (置換積分)

$\int_{-3}^3 \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} dx$ を、置換積分 $x = 3 \sin \theta$ を用いて求めよ。

値 $\boxed{}$

56 総合：極限×積分 (区分求積法)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3 \left(\frac{k}{n} \right)^2 + 2 \right\}$ を定積分に直し、

値を求めよ。

値 $\boxed{}$

57 総合：複素数の回転とベクトル

複素数 $z = 3 + 4i$ を、原点を中心に 90° 回転した複素数 $w = iz$ を求め、 w に対応するベクトルの成分を求めよ。

実部 $\boxed{}$ 虚部 $\boxed{}$

58 総合：双曲線と陰関数の微分

双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 上で、 $x = 2, y > 0$ を満たす点における接線の傾きを、陰関数の微分で求めよ。

傾き $\boxed{}$

59 総合：極限×空間ベクトル×微分 (章の総仕上げ1)

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + x}{2x^2 - 5}$ とする。空間ベクトル $\vec{u} = (a, 0, a)$ の大きさ $|\vec{u}|$ を求めよ。さらに、関数 $h(x) = x^3 - 3a^2x$ の極値を求めよ。

$a = \boxed{}$ $|\vec{u}| = \boxed{}$
 極大値 $\boxed{}$ ($x = \boxed{}$)
 極小値 $\boxed{}$ ($x = \boxed{}$)

60 総合：極限×微分×積分×曲線 (章の総仕上げ2)

$g(\theta) = e^{\cos \theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) の増減を調べ、最大値・最小値を求めよ。さらに、媒介変数表示 $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) が表す曲線の長さ L を求めよ。

g の最大値 $\boxed{}$ ($\theta = \boxed{}$)
 最小値 $\boxed{}$ ($\theta = \boxed{}$)
 $L = \boxed{}$

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 数Cで定義された楕円の媒介変数表示 $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ に対して、数IIIの微分法（媒介変数表示の微分公式）を使うと、曲線上の点における接線の傾きが求まる。 $a = 4, b = 3$ の場合について、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ における接線の傾きを実際に求めよ。また、数IIIの積分法（曲線の長さの公式）を使えば、数Cで定義された曲線の長さも計算できることを、半径3の円の第1象限部分（ $x = 3 \cos \theta, y = 3 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ）を例に示し、この2つの計算から「曲線を定義する数C」と「曲線を調べる数III」がどうつながっているかを説明せよ。

記2 「距離」を測るという同じ考え方が、ベクトルの大きさの公式と複素数の絶対値の公式として、数Cの中に2つの言葉で登場する。 $\vec{a} = (3, 4)$ と $z = 3 + 4i$ を例に、この2つの計算が同じであることを確認せよ。さらに、この「距離」の考え方が2次曲線の定義そのものを支えていることを、楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ と、その楕円上の点 $(0, 3)$ を例に説明せよ。

EXAM

穴埋め式 大問チャレンジ

誘導に沿って値を順に埋めていく形式の大問。私立大や国公立二次の穴埋め型の練習になる。
なお数Ⅲは共通テストの出題範囲ではないため、ここでは共通テスト対策ではなく、誘導に乗る力を鍛える演習として扱う。

大問1 目標時間 14分/配点 20点

太郎さんと花子さんは、遊園地の観覧車を見ながら、ゴンドラの動きを媒介変数表示で表せることに気づいた。観覧車の半径は9m、中心の高さは地上11mで、ゴンドラは60秒で1周する。地上にある観覧車の中心の真下を原点とし、時刻 t （秒）における角度を $\theta = \omega t$ ($\omega = \frac{\pi}{30}$ 、ラジアン毎秒) とすると、ゴンドラの位置は $x = 9 \cos \theta$, $y = 11 + 9 \sin \theta$ と表せる。

花子「観覧車って、円運動を媒介変数で表しているんだね。」
太郎「そうか。この θ を t で微分すれば、動く速さも分かりそうだ。」

(1)

$t = 10$ 秒後のゴンドラの x 座標を求めると、 $x = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ (m) である。ア、イを求めよ。

ア イ

(2)

高さ y の変化率 $\frac{dy}{dt}$ を θ の式で表し、 $t = 10$ 秒における値を求めると、 $\frac{dy}{dt} = \frac{\text{ウ}}{\text{エオ}}\pi$ (m/秒) である。ウ、エオを求めよ。

ウ エオ

(3)

花子「観覧車が回っている間、ゴンドラが実際に動く道のりも計算できそうだね。」(2)で求めた $\frac{dy}{dt} = \frac{3\pi}{10} \cos \theta$ と、同じ計算方法で求められる $\frac{dx}{dt} = -\frac{3\pi}{10} \sin \theta$ を使って、 $t = 15$ 秒から $t = 30$ 秒までにゴンドラが動いた道のり（弧の長さ） L を、 $L = \int_{15}^{30} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ から求めると、 $L = \frac{\text{カ}}{\text{キ}}\pi$ (m) である。カ、キを求めよ。

カ キ

大問2 目標時間 14分/配点 20点

太郎さんは、扇風機の羽根の先端（回転の中心からの距離4cm）の運動を、複素数平面上の点 $z(t) = 4(\cos \omega t + i \sin \omega t)$ で表せることに気づいた。羽根は1秒間に2回転するので、 $\omega = 4\pi$ （ラジアン毎秒）である。

太郎「複素数の絶対値と、微分でわかる速さは、同じものなのかな。」

花子「実部だけを取り出して、時刻 t で微分してみようよ。」

- (1) $t = \frac{1}{8}$ 秒後の $z(t)$ の実部と虚部を求めよ。実部＝、虚部＝.

ア イ

- (2) 実部 $x(t) = 4 \cos 4\pi t$ を t で微分すると $\frac{dx}{dt} = -16\pi \sin 4\pi t$ となる。 $t = \frac{1}{8}$ 秒におけるこの値を求めると $\frac{dx}{dt} = \text{ウエ} \pi$ （符号もつけて入力）である。ウエを求めよ。

ウエ

- (3) (1)で求めた $z\left(\frac{1}{8}\right)$ を使って $\left|z\left(\frac{1}{8}\right)\right|$ を求めよ。さらに、 $|z(t)|$ は実は時刻 t によらずつねに一定の値であることを絶対値の性質から示し、その一定の値を求めよ。 $|z(t)| = \text{オ}$ 。

オ

大問3 目標時間 14分／配点 20点

花子さんは、公園にかかる橋のアーチが、楕円の一部分の形をしていることに気づいた。地面を x 軸とし、アーチの中心の真下を原点とすると、アーチの断面（ $y \geq 0$ の部分）は $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ で近似できるという。アーチの最大の高さは3m、地面に接する2点は x 座標が ± 4 （m）である。

花子「この曲線の下での面積を求めれば、アーチの断面積が分かるね。」

- (1) アーチの下（ $-4 \leq x \leq 4$ 、 $0 \leq y$ ）の面積 S を、置換積分 $x = 4 \sin \theta$ を用いて定積分で求めると、 $S = \text{ア} \pi$ （ m^2 ）である。アを求めよ。

ア

- (2) このアーチの奥行き（ x 軸に垂直な方向の厚み）が5mであるとき、アーチの下の空間の体積 $V = S \times 5$ を求めると、 $V = \text{イウ} \pi$ （ m^3 ）である。イウを求めよ。

イウ

- (3) 花子「アーチの断面積が分かったから、断面の平均の高さも計算できるね。」(1)で求めた面積 S を、アーチの底辺の長さ8m（ $-4 \leq x \leq 4$ の範囲）で割ると、断面の平均の高さが求まる。この平均の高さを求めると、

$$\frac{S}{8} = \frac{\text{エ}}{\text{オ}} \pi \text{ (m) である。エ、オを求めよ。}$$

エ オ

大問4 目標時間 14分／配点 20点

ドローンが、時刻 t （秒、 $0 \leq t \leq 4$ ）における位置ベクトル $\vec{p}(t) = (t - 1, 2t - 4, 3 - t)$ で飛行しているとする。

太郎「速度ベクトルを求めれば、原点にいちばん近づく時刻も計算できそうだね。」

- (1) $t = 1$ 秒におけるドローンの位置の成分を求めよ。x成分 ア 、y成分 イ 、z成分 ウ（負の成分は符号もつけて入力）。

ア イ ウ

- (2) 速度ベクトル $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$ を求めよ。x成分 エ 、y成分 オ 、z成分 カ（負の成分は符号もつけて入力）。

エ オ カ

- (3) 花子「原点からの距離 $|\vec{p}(t)|$ が最小になる時刻では、位置ベクトル $\vec{p}(t)$ と(2)で求めた速度ベクトル $\vec{v}$ が垂直になっているはずだよ。」(2)の $\vec{v}$ を用いて、 $\vec{p}(t) \cdot \vec{v} = 0$ となる時刻 t を求めよ。また、そのときの原点からの距離を求めよ。 $t =$ キ 、距離 $= \sqrt{\text{ク}}$ 。

キ ク

大問5 目標時間 14分／配点 20点

太郎さんは、正六角形の歯車を複素数平面を使って設計している。歯車の頂点は、方程式 $z^6 = 64$ の解として表せる。

花子「歯の数を増やしていくと、隣り合う頂点はどんどん近づいていくはずだね。」

- (1) $z^6 = 64$ の解はすべて絶対値が等しい。この値 $|z|$ を求めよ。 ア .

ア

- (2) 解のうち偏角が 0° であるもの（正の実数解）を z_0 とする。 z_0 の値と、隣り合う解どうしの偏角の差（度）を求めよ。 $z_0 =$ イ 、偏角の差 $=$ ウエ °。

イ ウエ

- (3) 歯の数が n 個のとき、隣り合う頂点の偏角の差は $\frac{360^\circ}{n}$ である。 n を限りなく大きくするときの極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{360^\circ}{n}$ を求めよ。 エ °。

エ