

数III・C まとめテスト

解答（全62問）

氏名 _____

得点 _____ / 62点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～25）

1

$|r| < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を求めよ。

極限值 0

$r = \frac{3}{4}$ は $-1 < r < 1$ を満たすので0に収束する。

0

2

分数式・最高次で割る

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 2}{3n + 4}$ を求めよ。

極限值 5/3

分子・分母を n で割ると $\frac{5 - \frac{2}{n}}{3 + \frac{4}{n}} \rightarrow \frac{5 - 0}{3 + 0}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 2}{3n + 4} = \frac{5}{3}$$

3

約分

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ を求めよ。

極限值 2

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1 \quad (x \neq 1 \text{ なら約分できる})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 1 + 1 = 2$$

4

sinの基本公式

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$ を求めよ。

極限值 5/2

$$\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \rightarrow \frac{5}{2} \times 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

$y = (2x - 1)(x + 3)$ を微分し、 $y'(2)$ の値を求めよ。

$$y'(2) = \underline{13}$$

$f(x) = 2x - 1$, $f'(x) = 2$, $g(x) = x + 3$, $g'(x) = 1$ とおく。

$$y' = 2(x + 3) + (2x - 1) \cdot 1 = 2x + 6 + 2x - 1 = 4x + 5$$

$x = 2$ を代入すると $y'(2) = 8 + 5$

$$y'(2) = 13$$

$y = \frac{x - 4}{x + 2}$ を微分し、 $y'(1)$ の値を求めよ。

$$y'(1) = \underline{2/3}$$

$f(x) = x - 4$, $f'(x) = 1$, $g(x) = x + 2$, $g'(x) = 1$ とおく。

$$y' = \frac{1 \cdot (x + 2) - (x - 4) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{x + 2 - x + 4}{(x + 2)^2} = \frac{6}{(x + 2)^2}$$

$x = 1$ を代入すると分母は9。

$$y'(1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$y = (3x - 1)^5$ を微分すると $y' = A(3x - 1)^4$ の形になる。 A の値と $y'(1)$ の値を求めよ。

$$A = \underline{15} \quad y'(1) = \underline{240}$$

$u = 3x - 1$ とおくと $y = u^5$ 。

$$\frac{dy}{du} = 5u^4, \quad \frac{du}{dx} = 3$$

$$y' = 5u^4 \cdot 3 = 15u^4 = 15(3x - 1)^4$$

$x = 1$ を代入すると $u = 2$ なので $y'(1) = 15 \times 2^4 = 15 \times 16$ 。

$$A = 15, y'(1) = 240$$

$y = \sin x$ の $x = \frac{\pi}{6}$ における微分係数と、 $y = \cos x$ の $x = \frac{\pi}{3}$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

$$\sin : y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \underline{\sqrt{3}/2} \quad \cos : y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \underline{-\sqrt{3}/2}$$

$y = \sin x$ なら $y' = \cos x$ なので $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

$y = \cos x$ なら $y' = -\sin x$ なので $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

9

 $\ln x \cdot e^x$ の微分係数

$y = \ln x$ の $x = \frac{1}{3}$ における微分係数と、 $y = e^x$ の $x = 2$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

$$\ln x : y' \left(\frac{1}{3} \right) = \underline{3} \quad e^x : y'(2) = \underline{e^2}$$

$$y = \ln x \text{ なら } y' = \frac{1}{x} \text{ なので } y' \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{1/3} = 3。$$

$$y = e^x \text{ なら } y' = e^x \text{ (微分しても形が変わらない) なので } y'(2) = e^2。$$

$$3、e^2$$

10

不定積分の基本公式（総合）

$\int \left(6x^2 - \frac{3}{x} + 4 \sin x \right) dx$ を求めよ (C は省略してよい)。 x^3 の係数、 $\ln |x|$ の係数、 $\cos x$ の係数をそれぞれ求めよ。

$$x^3 \text{ の係数 } \underline{2} \quad \ln |x| \text{ の係数 } \underline{-3} \quad \cos x \text{ の係数 } \underline{-4}$$

各項を公式にあてはめる。

$$\int 6x^2 dx = 2x^3、\int \left(-\frac{3}{x} \right) dx = -3 \ln |x|、\int 4 \sin x dx = -4 \cos x$$

$$2x^3 - 3 \ln |x| - 4 \cos x$$

11

置換積分（べき乗型・定積分）

$$\int_0^1 6x(x^2 + 1)^2 dx \text{ を求めよ。}$$

値 7

$u = x^2 + 1$ とおくと $du = 2x dx$ 、すなわち $6x dx = 3 du$ 。 $x : 0 \rightarrow 1$ のとき $u : 1 \rightarrow 2$ 。

$$\int_0^1 6x(x^2 + 1)^2 dx = \int_1^2 3u^2 du = \left[u^3 \right]_1^2 = 8 - 1 = 7$$

7

12

部分積分（ $x \cdot e^x$ 型・定積分）

$$\int_0^1 xe^{2x} dx \text{ を求めよ。}$$

値 $(e^2 + 1)/4$

$f(x) = x$, $g'(x) = e^{2x}$ と選んで部分積分する ($g(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$)。

$$\int xe^{2x} dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{(2x - 1)e^{2x}}{4} + C$$

端点を代入する。

$$x = 1 : \frac{e^2}{4} \quad x = 0 : -\frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 xe^{2x} dx = \frac{e^2}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}$$

13

奇関数の性質

$\int_{-3}^3 (5x^3 - 2x) dx$ を求めよ。

値 0

$f(x) = 5x^3 - 2x$ は $f(-x) = -5x^3 + 2x = -f(x)$ より奇関数。区間が原点对称なので、計算するまでもなく積分は0。

0

14

ベクトルの成分計算

$\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (-1, 4)$ のとき、 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ を成分で求めよ。

x成分 7 y成分 -18

$$2\vec{a} = (4, -6), 3\vec{b} = (-3, 12)$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = (4 - (-3), -6 - 12) = (7, -18)$$

$$(7, -18)$$

15

内積の基本

$\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (2, -4)$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 + 1 \times (-4) = 6 - 4$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

16

ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (3, 4)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

$$|\vec{a}| = \underline{5}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$|\vec{a}| = 5$$

17

内分点

2点 $A(1, 2)$, $B(9, 10)$ を $3:1$ に内分する点の座標を求めよ。

$$\text{x座標 } \underline{7} \quad \text{y座標 } \underline{8}$$

内分点の公式 $P = \frac{1 \cdot A + 3 \cdot B}{3 + 1}$ にあてはめる。

$$\text{x座標: } \frac{1 \times 1 + 3 \times 9}{3 + 1} = \frac{1 + 27}{4} = 7$$

$$\text{y座標: } \frac{1 \times 2 + 3 \times 10}{4} = \frac{2 + 30}{4} = 8$$

$$(7, 8)$$

18

重心

3点 $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(3, 9)$ の重心 G の座標を求めよ。

$$\text{x座標 } \underline{3} \quad \text{y座標 } \underline{3}$$

重心は3頂点の座標の平均。

$$\text{x座標: } \frac{0 + 6 + 3}{3} = 3 \quad \text{y座標: } \frac{0 + 0 + 9}{3} = 3$$

$$G(3, 3)$$

19

空間ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (1, 2, -2)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

$$|\vec{a}| = \underline{3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9}$$

$$|\vec{a}| = 3$$

20

放物線の焦点・準線

放物線 $y^2 = 8x$ の焦点のx座標と、準線の方程式 ($x =$ の右辺の値) を求めよ。

焦点のx座標 $\underline{2}$ 準線: $x = \underline{-2}$

$y^2 = 4px$ の形とみると $4p = 8$ より $p = 2$ 。

焦点は $(p, 0) = (2, 0)$ 、準線は $x = -p = -2$ 。

焦点のx座標2、準線 $x = -2$

21

楕円の焦点

楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ の焦点のx座標 (正の方の値) を求めよ。

焦点のx座標 $\underline{\sqrt{7}}$

$$a^2 = 16, b^2 = 9 \text{ なので } c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7, c = \sqrt{7}.$$

焦点のx座標は $\sqrt{7}$ (焦点は $(\pm\sqrt{7}, 0)$)

22

双曲線の漸近線

双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ の漸近線の傾き（正の方の値）を求めよ。

傾き 4/3

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ の漸近線は } y = \pm \frac{b}{a}x. \quad a = 3, b = 4 \text{ なので傾きは } \frac{b}{a} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{傾きは } \frac{4}{3} \quad (\text{漸近線は } y = \pm \frac{4}{3}x)$$

23

極形式

複素数 $z = 1 + i$ の絶対値 $|z|$ と、偏角（度）を求めよ。

$$|z| = \underline{\sqrt{2}} \quad \text{偏角 } \underline{45}^\circ$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

実部・虚部がともに1で等しく、ともに正なので偏角は 45° （第1象限で実部=虚部の直線上）。

$$|z| = \sqrt{2}, \text{ 偏角 } 45^\circ$$

24

ド・モアブルの定理

$z = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ のとき、 z^3 の値（実数）を求めよ。

$$z^3 = \underline{-1}$$

$$\text{ド・モアブルの定理より } z^3 = \cos(3 \times 60^\circ) + i \sin(3 \times 60^\circ) = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ.$$

$$\cos 180^\circ = -1, \sin 180^\circ = 0.$$

$$z^3 = -1$$

25

n乗根の個数

方程式 $z^5 = 1$ (1の5乗根) を満たす複素数 z は何個あるか。

個数 5 個

$1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$ の n 乗根は、絶対値1・偏角 $\frac{0^\circ + 360^\circ k}{5}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) でちょうど5個ある (複素数平面上で単位円を5等分する点)。

5個

標準 (26~50)

26

根号の有理化 (数列)

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)$ を求めよ。

極限值 5/2

分子・分母に $\sqrt{n^2 + 5n} + n$ を掛けて有理化する。

$$\sqrt{n^2 + 5n} - n = \frac{(n^2 + 5n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n} + n} = \frac{5n}{\sqrt{n^2 + 5n} + n}$$

分子・分母を n で割ると

$$= \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + 1} \rightarrow \frac{5}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) = \frac{5}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 3} = 7$ が成り立つように定数 a, b の値を定めよ。

$$a = \underline{-5} \quad b = \underline{-3}$$

分母が $x \rightarrow 3$ で0に近づき、極限値が7（有限）と指定されているので、分子も $x = 3$ で0でなければならない。

$$\text{分子に } x = 3 \text{ を代入: } 18 + 3a + b = 0 \quad \cdots(1)$$

分子が $x - 3$ を因数に持つので $2x^2 + ax + b = (x - 3)(2x + c)$ と書ける (c は定数)。展開すると $2x^2 + (c - 6)x - 3c$ 。

$$\text{係数比較: } a = c - 6, b = -3c.$$

商 $2x + c$ に $x = 3$ を代入した値が極限値になるので、 $6 + c = 7$ より $c = 1$ 。

このとき $a = c - 6 = -5, b = -3c = -3$ 。((1)式で確認: $18 + 3(-5) + (-3) = 0$ で成立)

$$a = -5, b = -3$$

次の関数が $x = 4$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & (x \neq 4) \\ a & (x = 4) \end{cases}$$

$$a = \underline{8}$$

$$x \neq 4 \text{ のとき } f(x) = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = x + 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8.$$

$$a = 8$$

$y = (x + 2)^4(x - 1)^3$ を対数微分法で微分し、 $y'(2)$ の値を求めよ。

$$y'(2) = \underline{\underline{1024}}$$

$x = 2$ 付近では $x + 2 > 0$, $x - 1 > 0$ なので、そのまま両辺の対数をとってよい。

$$\ln y = 4 \ln(x + 2) + 3 \ln(x - 1)$$

両辺を x で微分する。

$$\frac{y'}{y} = \frac{4}{x + 2} + \frac{3}{x - 1}$$

まず $x = 2$ での y の値を求める。

$$y(2) = (2 + 2)^4(2 - 1)^3 = 4^4 \times 1^3 = 256$$

次に $x = 2$ での $\frac{y'}{y}$ の値を求める。

$$\left. \frac{y'}{y} \right|_{x=2} = \frac{4}{4} + \frac{3}{1} = 1 + 3 = 4$$

$$y' = y \times \frac{y'}{y} \text{ より}$$

$$y'(2) = 256 \times 4 = 1024$$

30

極値・3次関数

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ の極値を求めよ。

極大値 10 ($x =$ -1) 極小値 -22 ($x =$ 3)

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$ 。 $f'(x) = 0$ より $x = -1, 3$ 。

$x < -1$ で増加、 $-1 < x < 3$ で減少、 $x > 3$ で増加。

$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$ 、 $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$ 。

$x = -1$ で極大値10、 $x = 3$ で極小値-22

31

接線・指数関数

曲線 $y = e^{2x}$ の $x = 0$ における接線の傾きと y 切片を求めよ。

傾き 2 y 切片 1

$f'(x) = 2e^{2x}$ より $f'(0) = 2e^0 = 2$ 。接点は $f(0) = e^0 = 1$ なので $(0, 1)$ 。

接線: $y = 2(x - 0) + 1 = 2x + 1$ (傾き2、 y 切片1)

傾き2、 y 切片1

$f(x) = x^3 - 3x + k$ のグラフが x 軸と異なる3点で交わるように、定数 k の値の範囲を求めよ。

下端 = -2 上端 = 2

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ 。 $f'(x) = 0$ より $x = -1, 1$ 。

$x < -1$ で増加、 $-1 < x < 1$ で減少、 $x > 1$ で増加。

極大値 $f(-1) = -1 + 3 + k = k + 2$ 、極小値 $f(1) = 1 - 3 + k = k - 2$ 。

x 軸と異なる3点で交わる条件は「極大値 > 0 」かつ「極小値 < 0 」。

$k + 2 > 0$ より $k > -2$ 。 $k - 2 < 0$ より $k < 2$ 。

$$-2 < k < 2$$

$\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \frac{1}{A} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$ の A を求めよ。

$A =$ 6

$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right)$ と分解できるので

$$\int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \frac{1}{6} \ln |x-3| - \frac{1}{6} \ln |x+3| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

$$A = 6$$

34

半角公式（定積分）

$\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, dx$ を求めよ。

値 $(\pi+2)/8$

半角公式 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ を使う。

$$\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\sin(\pi/2)}{4} \right) - 0 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

分母をそろえると $\frac{\pi}{8} + \frac{2}{8} = \frac{\pi+2}{8}$

$$\frac{\pi+2}{8}$$

35

曲線の長さ

曲線 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 3$) の長さ L を求めよ。

$L =$ $14/3$

$y' = x^{1/2} = \sqrt{x}$ なので $1 + (y')^2 = 1 + x$ 。

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{2}{3} (4^{3/2} - 1) = \frac{2}{3} (8 - 1)$$

$$L = \frac{14}{3}$$

36

共線条件

3点 $A(1, 2)$, $B(4, 8)$, $C(k, 20)$ が一直線上にあるように、定数 k の値を求めよ。

$$k = \underline{10}$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 6), \overrightarrow{AC} = (k-1, 18)。$$

一直線上にある $\iff \overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t が存在する。

y 成分より $18 = 6t$ なので $t = 3$ 。

x 成分より $k-1 = 3 \times 3 = 9$ なので $k = 10$ 。

$$k = 10$$

37

内積を用いた垂直条件

$\vec{a} = (x, 3)$, $\vec{b} = (4, -2)$ が垂直であるように、 x の値を求めよ。

$$x = \underline{3/2}$$

$$\text{垂直} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0。$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4x + 3 \times (-2) = 4x - 6 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

38

空間ベクトルの内積

$\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と、なす角 θ の $\cos \theta$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{4} \quad \cos \theta = \underline{4/9}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 2 \times 2 = 2 - 2 + 4 = 4$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3, |\vec{b}| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{4}{3 \times 3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4, \cos \theta = \frac{4}{9}$$

39

外分点

2点 $A(2, 1)$, $B(8, 4)$ を $5:2$ に外分する点の座標を求めよ。

x座標 12 y座標 6

外分点の公式 $P = \frac{-2 \cdot A + 5 \cdot B}{5 - 2}$ にあてはめる。

$$\text{x座標: } \frac{-2 \times 2 + 5 \times 8}{5 - 2} = \frac{-4 + 40}{3} = 12$$

$$\text{y座標: } \frac{-2 \times 1 + 5 \times 4}{5 - 2} = \frac{-2 + 20}{3} = 6$$

(12, 6)

40

楕円の定義

楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上の点 P から2つの焦点 F, F' までの距離の和 $PF + PF'$ を求めよ。

$$PF + PF' = \underline{10}$$

楕円の定義より、2焦点までの距離の和はつねに $2a$ で一定。 $a^2 = 25$ より $a = 5$ なので $2a = 10$ 。

$$PF + PF' = 10$$

41

極座標

極方程式 $r = 6 \cos \theta$ が表す図形は円である。この円の半径を求めよ。

半径 3

両辺に r を掛けると $r^2 = 6r \cos \theta$ 。 $r^2 = x^2 + y^2$, $r \cos \theta = x$ を代入すると $x^2 + y^2 = 6x$ すなわち $(x - 3)^2 + y^2 = 9$

これは中心(3, 0)、半径3の円。

半径3

$z = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ を原点を中心に 90° 回転した複素数の絶対値と偏角(度)を求めよ。

絶対値 2 偏角 120°

絶対値 r の複素数を θ 回転しても絶対値は変わらず、偏角に θ が足される ($\cos \theta + i \sin \theta$ を掛けることに対応)。

絶対値は2のまま。偏角は $30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ 。

絶対値2、偏角 120°

媒介変数表示 $x = 2 + 3t$, $y = -1 + 4t$ ($0 \leq t \leq 2$) で表される線分の長さ L を、曲線の長さの公式を用いて求めよ。

$L =$ 10

$\frac{dx}{dt} = 3, \frac{dy}{dt} = 4$ なので

$$L = \int_0^2 \sqrt{3^2 + 4^2} dt = \int_0^2 5 dt = 5 \times 2$$

(検算： $t = 0$ で $(2, -1)$ 、 $t = 2$ で $(8, 7)$ 。2点間の距離は $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ で一致。直線なので曲線の長さ=2点間の距離になる。)

$L = 10$

楕円 $x = 3 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ 上の $\theta = \frac{\pi}{3}$ の点における接線の傾き $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

傾き $-2\sqrt{3}/9$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -3 \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 2 \cos \theta \text{ なので} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{2 \cos \theta}{-3 \sin \theta} \\ \theta &= \frac{\pi}{3} \text{ を代入する。} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ なので} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2 \times \frac{1}{2}}{-3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

$$\text{傾きは } -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

楕円 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(2, 1)$ における接線の傾きを、陰関数の微分で求めよ。

傾き $-1/2$

$$\begin{aligned} \text{点}(2, 1) \text{ が楕円上にあることをまず確認：} \frac{4}{8} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ (成立)。} \\ \text{両辺を } x \text{ で微分する (} y \text{ は } x \text{ の関数とみて、合成関数の微分法で } y' \text{ をつける)。} \\ \frac{2x}{8} + \frac{2y \cdot y'}{2} &= 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x}{4} + y \cdot y' = 0 \\ y' &= -\frac{x^2}{4y} \\ \text{点}(2, 1) \text{ を代入すると } y' &= -\frac{2}{4 \times 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{傾きは } -\frac{1}{2}$$

点 $A(1, 0, 0)$ から、直線上の点 $P(t) = (t, 2t, 2-t)$ (t は実数) までの距離の2乗 $f(t) = AP^2$ を t の関数として表し、微分によって距離 AP が最小となる t の値と、そのときの $f(t)$ の値を求めよ。

$t = \underline{1/2}$ 最小値 $\underline{7/2}$

$f(t) = (t-1)^2 + (2t)^2 + (2-t)^2$ を展開する。

$$(t-1)^2 = t^2 - 2t + 1, (2t)^2 = 4t^2, (2-t)^2 = t^2 - 4t + 4$$

$$f(t) = t^2 - 2t + 1 + 4t^2 + t^2 - 4t + 4 = 6t^2 - 6t + 5$$

$f'(t) = 12t - 6 = 0$ より $t = \frac{1}{2}$ 。 $f''(t) = 12 > 0$ (下に凸) なので $t = \frac{1}{2}$ で最小。

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \times \frac{1}{4} - 6 \times \frac{1}{2} + 5 = \frac{3}{2} - 3 + 5 = \frac{7}{2}$$

$t = \frac{1}{2}$ のとき、 $f(t)$ は最小値 $\frac{7}{2}$ をとる

$z = 3 \cos \theta + 4i \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) について、 $|z|^2$ を θ の関数として表し、微分を用いて $|z|$ の最大値を求めよ。

$|z|$ の最大値 $\underline{4}$

$|z|^2 = (3 \cos \theta)^2 + (4 \sin \theta)^2 = 9 \cos^2 \theta + 16 \sin^2 \theta$ 。これを $f(\theta)$ とおく。

$$f'(\theta) = -18 \cos \theta \sin \theta + 32 \sin \theta \cos \theta = 14 \sin \theta \cos \theta = 7 \sin 2\theta$$

$$f'(\theta) = 0 \text{ より } \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}。$$

各点での値を比べる。 $f(0) = 9$ ($\theta = 0$)、 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 16$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$)、 $f(\pi) = 9$ 、

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 16。$$

最大は $f = 16$ なので $|z| = \sqrt{16} = 4$ 。

$|z|$ の最大値は 4 ($\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のとき)

円 $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ 上の点の x座標と y座標の積 xy の最大値を、 θ による微分を用いて求めよ。

最大値 2

$$xy = 2 \cos \theta \times 2 \sin \theta = 4 \sin \theta \cos \theta = 2 \sin 2\theta$$

$\frac{d}{d\theta}(2 \sin 2\theta) = 4 \cos 2\theta = 0$ より $2\theta = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $\sin 2\theta = 1$ で最大。

xy の最大値は2 ($\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき)

ベクトル $\vec{a}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n} \right)$ について、 $n \rightarrow \infty$ のときの各成分の極限を求めよ。

x成分の極限 0 y成分の極限 1

それぞれの成分を、ふつうの数列の極限として計算すればよい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1$$

x成分は0、y成分は1に近づく

円 $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の長さ L を、曲線の長さの公式で求めよ。

$$L = \underline{\pi}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -2 \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 2 \cos \theta \text{ なので} \\ \sqrt{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2} &= \sqrt{4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta} = 2 \\ L &= \int_0^{\pi/2} 2 d\theta = 2 \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(検算：これは半径2の円周の $\frac{1}{4}$ にあたる。円周は $2\pi \times 2 = 4\pi$ なので $\frac{1}{4}$ は π で一致。)

$$L = \pi$$

発展 (51~60)

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+3}$ とする。ベクトル $\vec{w} = (a, a^2)$ の大きさ $|\vec{w}|$ を求めよ。また、関数 $g(x) = x^2 - ax$ の最小値を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad |\vec{w}| = \underline{2\sqrt{5}} \quad g(x) \text{ の最小値 } \underline{-1} \quad (x = \underline{1})$$

まず a を求める。分子・分母を n で割ると

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a = 2 \text{ なので } \vec{w} = (2, 4)。|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}。$$

$g(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ 。下に凸なので頂点で最小、最小値は -1 ($x = 1$)。

$$a = 2、|\vec{w}| = 2\sqrt{5}、g(x) \text{ は } x = 1 \text{ で最小値 } -1$$

位置ベクトルで表される点 $P(t) = (1+t, 2-t, t)$ から原点までの距離の2乗 $f(t) = OP^2$ を t の関数として表し、微分を用いて $f(t)$ を最小にする t の値と、その最小値を求めよ。

$t = \underline{1/3}$ 最小値 $\underline{14/3}$

$f(t) = (1+t)^2 + (2-t)^2 + t^2$ を展開する。

$$(1+t)^2 = 1 + 2t + t^2, \quad (2-t)^2 = 4 - 4t + t^2$$

$$f(t) = 1 + 2t + t^2 + 4 - 4t + t^2 + t^2 = 3t^2 - 2t + 5$$

$f'(t) = 6t - 2 = 0$ より $t = \frac{1}{3}$ 。 $f''(t) = 6 > 0$ なので $t = \frac{1}{3}$ で最小。

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{9} - 2 \times \frac{1}{3} + 5 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 5 = -\frac{1}{3} + 5 = \frac{14}{3}$$

$t = \frac{1}{3}$ のとき、最小値 $\frac{14}{3}$

直線 $y = x + k$ が楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ に接するように、正の定数 k の値を求めよ。

$$k = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$$

$y = x + k$ を楕円の式に代入する。

$$\frac{x^2}{4} + (x + k)^2 = 1$$

両辺に4を掛けて整理する。

$$x^2 + 4(x + k)^2 = 4$$

$$x^2 + 4x^2 + 8kx + 4k^2 = 4$$

$$5x^2 + 8kx + (4k^2 - 4) = 0$$

「接する」とは共有点がちょうど1個、つまりこの2次方程式が重解をもつということ。判別式 $D = 0$ 。

$$D = (8k)^2 - 4 \times 5 \times (4k^2 - 4) = 64k^2 - 80k^2 + 80 = -16k^2 + 80$$

$$D = 0 \text{ より } 16k^2 = 80, k^2 = 5, \text{ よって } k = \pm\sqrt{5}.$$

条件は $k > 0$ なので

$$k = \sqrt{5}$$

複素数平面上を動く点 $z(t) = 2(\cos t + i \sin t)$ の実部 $x(t) = 2 \cos t$ について、 $\frac{dx}{dt}$ を求め、 $t = \frac{\pi}{3}$ における値を求めよ。

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\pi/3} = \underline{\underline{-\sqrt{3}}}$$

$$\begin{aligned} x(t) = 2 \cos t \text{ より } \frac{dx}{dt} &= -2 \sin t. \\ t = \frac{\pi}{3} \text{ を代入すると、} \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ なので} \\ \frac{dx}{dt} &= -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \\ &-\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\int_{-3}^3 \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} dx$ を、置換積分 $x = 3 \sin \theta$ を用いて求めよ。

値 3π

$x = 3 \sin \theta$ とおくと $dx = 3 \cos \theta d\theta$ 。 $x : -3 \rightarrow 3$ のとき $\theta : -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ （この範囲で $\cos \theta \geq 0$ ）。

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 \theta} = 3\sqrt{1-\sin^2 \theta} = 3 \cos \theta \quad (\cos \theta \geq 0 \text{ より})$$

積分の中身を書き換える。

$$\frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} dx = \frac{2}{3} \times 3 \cos \theta \times 3 \cos \theta d\theta = 6 \cos^2 \theta d\theta$$

半角公式 $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ を使う。

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 6 \cos^2 \theta d\theta = 6 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 6 \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) - \left(-\frac{\pi}{4} + 0 \right) \right\} = 6 \times \frac{\pi}{2}$$

（この積分は、断面が楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ の上半分の面積を求めたものにあたる。）

3π

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 3 \left(\frac{k}{n} \right)^2 + 2 \right\}$ を定積分に直し、値を求めよ。

値 3

和の形が「 $\frac{1}{n} \times (k/n \text{ だけの式})$ 」になっているので、 $f(x) = 3x^2 + 2$ として区分求積法の公式が使える。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 + 2) dx = \left[x^3 + 2x \right]_0^1 = 1 + 2$$

3

複素数 $z = 3 + 4i$ を、原点を中心に 90° 回転した複素数 $w = iz$ を求め、 w に対応するベクトルの成分を求めよ。

実部 -4 虚部 3

複素数の掛け算で i を掛けることは、原点を中心に 90° 回転することに対応する。

$$w = iz = i(3 + 4i) = 3i + 4i^2 = 3i - 4 = -4 + 3i$$

対応するベクトルは実部・虚部を成分にとって $(-4, 3)$ 。

(検算： $|w| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ 。もとの $|z| = \sqrt{9 + 16} = 5$ と一致し、回転で大きさが変わらないことが確認できる。)

$w = -4 + 3i$ (ベクトルの成分は $(-4, 3)$)

双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 上で、 $x = 2$ 、 $y > 0$ を満たす点における接線の傾きを、陰関数の微分で求めよ。

傾き 2

まず $x = 2$ のときの y の値を求める。

$$4 - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ より } \frac{y^2}{3} = 3, y^2 = 9. y > 0 \text{ より } y = 3.$$

両辺を x で微分する。

$$2x - \frac{2y \cdot y'}{3} = 0$$

$$y' = \frac{3x}{y}$$

$$\text{点}(2, 3) \text{ を代入すると } y' = \frac{3 \times 2}{3} = \frac{6}{3}$$

傾きは2

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + x}{2x^2 - 5}$ とする。空間ベクトル $\vec{u} = (a, 0, a)$ の大きさ $|\vec{u}|$ を求めよ。さらに、関数 $h(x) = x^3 - 3a^2x$ の極値を求めよ。

$a = \underline{3}$ $|\vec{u}| = \underline{3\sqrt{2}}$ 極大値 $\underline{54}$ ($x = \underline{-3}$) 極小値 $\underline{-54}$ ($x = \underline{3}$)

まず a を求める。分子・分母を x^2 で割ると

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{5}{x^2}} = \frac{6}{2} = 3$$

$a = 3$ なので $\vec{u} = (3, 0, 3)$ 。 $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 。

$h(x) = x^3 - 3 \times 9 \times x = x^3 - 27x$ 。 $h'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ 。 $h'(x) = 0$ より $x = -3, 3$ 。

$x < -3$ で増加、 $-3 < x < 3$ で減少、 $x > 3$ で増加。

$h(-3) = -27 + 81 = 54$ （極大）、 $h(3) = 27 - 81 = -54$ （極小）。

$a = 3$ 、 $|\vec{u}| = 3\sqrt{2}$ 。 $x = -3$ で極大値 54、 $x = 3$ で極小値 -54

$g(\theta) = e^{\cos \theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) の増減を調べ、最大値・最小値を求めよ。さらに、媒介変数表示 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) が表す曲線の長さ L を求めよ。

g の最大値 e ($\theta =$ 0) 最小値 $1/e$ ($\theta =$ π) $L =$ π

$g(\theta) = e^{\cos \theta}$ を微分する（合成関数の微分）。

$$g'(\theta) = -\sin \theta \cdot e^{\cos \theta}$$

$e^{\cos \theta} > 0$ は常に成り立つので、符号は $-\sin \theta$ だけで決まる。 $0 < \theta < \pi$ では $\sin \theta > 0$ なので $g'(\theta) < 0$ 。つまり $g(\theta)$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ でずっと減少する。

よって最大は $\theta = 0 : g(0) = e^{\cos 0} = e^1 = e$ 。最小は $\theta = \pi : g(\pi) = e^{\cos \pi} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ 。

次に曲線の長さを求める。 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ は半径1の円（の上半分、 $0 \leq \theta \leq \pi$ ）を表す。

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta \text{ なので } \sqrt{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2} =$$

$$\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1$$

$$L = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi$$

（検算：半径1の円周は 2π 、その半分（上半円）は π で一致。）

g は $\theta = 0$ で最大値 e 、 $\theta = \pi$ で最小値 $\frac{1}{e}$ 。曲線の長さ $L = \pi$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

数Cで定義された楕円の媒介変数表示 $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ に対して、数IIIの微分法（媒介変数表示の微分公式）を使うと、曲線上の点における接線の傾きが求まる。 $a = 4$, $b = 3$ の場合について、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ における接線の傾きを実際に求めよ。また、数IIIの積分法（曲線の長さの公式）を使えば、数Cで定義された曲線の長さも計算できることを、半径3の円の第1象限部分（ $x = 3 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ）を例に示し、この2つの計算から「曲線を定義する数C」と「曲線を調べる数III」がどうつながっているかを説明せよ。

まず接線の傾きを求める。楕円 $x = 4 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$ について

$$\frac{dx}{d\theta} = -4 \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3 \cos \theta$$

なので、媒介変数表示の微分公式より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{3 \cos \theta}{-4 \sin \theta}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ を代入する。 $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であり、この値は分子・分母で約分できるので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{-4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

次に曲線の長さを求める。円 $x = 3 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$ について

$$\frac{dx}{d\theta} = -3 \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3 \cos \theta$$

なので

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{9 \sin^2 \theta + 9 \cos^2 \theta} = \sqrt{9} = 3$$

曲線の長さの公式より

$$L = \int_0^{\pi/2} 3 d\theta = 3 \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

（検算：半径3の円周は 6π 、その $\frac{1}{4}$ は $\frac{3\pi}{2}$ で一致。）

この2つの計算を振り返ると、役割がはっきり分かれていることが分かる。楕円や円を「 $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ 」という媒介変数の式で定義するのは数C（平面上の曲線）の仕事である。しかし、その曲線の1点における接線の傾きを求めたり、曲線に沿った長さを実際の数値として計算したりするには、数III（微分法・積分法）の合成関数の微分法や区分求積法にもとづく公式がなければ、一歩も先に進めない。つまり数Cが「図形をどう表すか」という言葉を用意し、数IIIがその図形を実際に「調べる」ための計算技術を提供するという、ちょうど言葉と道具のような関係でこの2科目は

つながっている。

$\theta = \frac{\pi}{4}$ における接線の傾きは $-\frac{3}{4}$ 。半径3の円の第1象限部分の長さは $\frac{3\pi}{2}$ 。数Cが曲線を定義し、数IIIがその曲線の傾き・長さを調べる、という役割分担でつながっている。

記2 「距離」を測ると同じ考え方が、ベクトルの大きさの公式と複素数の絶対値の公式として、数Cの中に2つの言葉で登場する。 $\vec{a} = (3, 4)$ と $z = 3 + 4i$ を例に、この2つの計算が同じであることを確認せよ。さらに、この「距離」の考え方が2次曲線の定義そのものを支えていることを、楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ と、その楕円上の点 $(0, 3)$ を例に説明せよ。

まずベクトルの大きさと複素数の絶対値を比べる。

$$\vec{a} = (3, 4) \text{の大きさは} |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$z = 3 + 4i \text{の絶対値は} |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

どちらも実部・虚部（またはx成分・y成分）を2乗して足し、根号をとるという、まったく同じ三平方の定理の計算になっている。複素数 $a + bi$ は、成分 (a, b) のベクトルだと思って計算しても答えが変わらないことが、この一致から分かる。

次に、この「距離」が楕円の定義を支えていることを確認する。楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ は $a^2 = 25$, $b^2 = 9$ なので、焦点までの距離 c は $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$ より $c = 4$ によって焦点は $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$ 。

点 $(0, 3)$ から2焦点までの距離を、ベクトルの大きさの公式（三平方の定理）で実際に計算する。

$$PF = \sqrt{(0 - 4)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$PF' = \sqrt{(0 - (-4))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$PF + PF' = 5 + 5 = 10$$

これは $2a = 2 \times 5 = 10$ と一致しており、楕円の定義「2焦点までの距離の和が一定（ $= 2a$ ）」が、ベクトルの大きさの公式によって実際に確かめられた。

このように、静止した2点間の距離を測るベクトルの大きさ・複素数の絶対値という道具は、そのまま2次曲線の定義（距離が一定という条件）を支える土台になっている。さらに言えば、この根号の中身（三平方の定理）は、数IIIの曲線の長さの公式 $L = \int \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt$ の根号の中身とも同じものである。「距離を測る」という考え方は、動かない2点の間でも（ベクトル・複素数）、曲線に沿って動きながらも（積分）、つねに三平方の定理が土台になっている。

$|\vec{a}| = |z| = 5$ で、ベクトルの大きさと複素数の絶対値は同じ計算。楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上の点 $(0, 3)$ からの2焦点までの距離の和は $5 + 5 = 10 = 2a$ で楕円の定義と一致し、「距離」の公式が2次曲線の定義そのものを支えている。



EXAM

穴埋め式 大問チャレンジ

誘導に沿って値を順に埋めていく形式の大問。私立大や国公立二次の穴埋め型の練習になる。

なお数Ⅲは共通テストの出題範囲ではないため、ここでは共通テスト対策ではなく、誘導に乗る力を鍛える演習として扱う。

大問1 目標時間 14分／配点 20点

太郎さんと花子さんは、遊園地の観覧車を見ながら、ゴンドラの動きを媒介変数表示で表せることに気づいた。観覧車の半径は9m、中心の高さは地上11mで、ゴンドラは60秒で1周する。地上にある観覧車の中心の真下を原点とし、時刻 t （秒）における角度を $\theta = \omega t$ （ $\omega = \frac{\pi}{30}$ 、ラジアン毎秒）とすると、ゴンドラの位置は $x = 9 \cos \theta$, $y = 11 + 9 \sin \theta$ と表せる。

花子「観覧車って、円運動を媒介変数で表しているんだね。」

太郎「そうか。この θ を t で微分すれば、動く速さも分かりそうだ。」

(1)

$t = 10$ 秒後のゴンドラの x 座標を求めると、 $x = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ (m) である。ア、イを求めよ。

ア 9 イ 2

$$t = 10 \text{ のとき } \theta = \omega t = \frac{\pi}{30} \times 10 = \frac{\pi}{3}。$$

$$x = 9 \cos \frac{\pi}{3} = 9 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{9}{2} \text{ (ア} = 9、\text{イ} = 2)$$

(2)

高さ y の変化率 $\frac{dy}{dt}$ を θ の式で表し、 $t = 10$ 秒における値を求めると、 $\frac{dy}{dt} =$

ウ

エオ

π (m/秒) である。ウ、エオを求めよ。

ウ 3 エオ 20

$y = 11 + 9 \sin \theta$ 、 $\theta = \omega t$ なので、合成関数の微分法より

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = 9 \cos \theta \times \omega = 9 \cos \theta \times \frac{\pi}{30} = \frac{3\pi}{10} \cos \theta$$

$t = 10$ のとき $\theta = \frac{\pi}{3}$ ((1)より) なので、 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ を代入する。

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3\pi}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{20}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{20}\pi \quad (\text{ウ} = 3, \text{エオ} = 20)$$

(3)

花子「観覧車が回っている間、ゴンドラが実際に動く道のりも計算できそうだね。」(2)で求めた $\frac{dy}{dt} = \frac{3\pi}{10} \cos \theta$ と、同じ計算方法で求められる $\frac{dx}{dt} = -\frac{3\pi}{10} \sin \theta$ を使って、 $t = 15$ 秒から $t = 30$ 秒までにゴンドラが動いた道のり

(弧の長さ) L を、 $L = \int_{15}^{30} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ から求めると、 $L =$

カ

キ

π (m) である。カ、キを求めよ。

カ 9 キ 2

(2)より $\frac{dy}{dt} = \frac{3\pi}{10} \cos \theta$ 。同じやり方 ($y = 11 + 9 \sin \theta$ を $x = 9 \cos \theta$ に置き換えるだけ) で

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(9 \cos \theta) = -9 \sin \theta \times \frac{\pi}{30} = -\frac{3\pi}{10} \sin \theta$$

も求まる。

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3\pi}{10}\right)^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{3\pi}{10}\right)^2 \cos^2 \theta} = \frac{3\pi}{10} \quad (\theta \text{によらず一定})$$

$$\text{よって } L = \int_{15}^{30} \frac{3\pi}{10} dt = \frac{3\pi}{10} \times (30 - 15) = \frac{3\pi}{10} \times 15 = \frac{45\pi}{10} = \frac{9\pi}{2}$$

$$L = \frac{9}{2}\pi \text{ (力=9、キ=2)}$$

大問2 目標時間 14分/配点 20点

太郎さんは、扇風機の羽根の先端（回転の中心からの距離4cm）の運動を、複素数平面上の点 $z(t) = 4(\cos \omega t + i \sin \omega t)$ で表せることに気づいた。羽根は1秒間に2回転するので、 $\omega = 4\pi$ （ラジアン毎秒）である。

太郎「複素数の絶対値と、微分でわかる速さは、同じものなのかな。」

花子「実部だけを取り出して、時刻 t で微分してみようよ。」

(1) $t = \frac{1}{8}$ 秒後の $z(t)$ の実部と虚部を求めよ。実部= ア、虚部= イ。

ア 0 イ 4

$$t = \frac{1}{8} \text{ のとき、角度は } \omega t = 4\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}。$$

$$z\left(\frac{1}{8}\right) = 4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 4(0 + i \times 1) = 4i$$

実部0、虚部4 (ア= 0、イ= 4)

(2) 実部 $x(t) = 4 \cos 4\pi t$ を t で微分すると $\frac{dx}{dt} = -16\pi \sin 4\pi t$ となる。 $t = \frac{1}{8}$ 秒におけるこの値を求めると $\frac{dx}{dt} =$ ウエ π （符号もつけて入力）である。ウエを求めよ。

ウエ -16

$$t = \frac{1}{8} \text{ のとき、 } 4\pi t = 4\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2} \text{ なので } \sin 4\pi t = \sin \frac{\pi}{2} = 1。$$

$$\frac{dx}{dt} = -16\pi \times 1 = -16\pi$$

$$\frac{dx}{dt} = -16\pi \quad (\text{ウエ} = -16)$$

(3)

(1)で求めた $z\left(\frac{1}{8}\right)$ を使って $\left|z\left(\frac{1}{8}\right)\right|$ を求めよ。さらに、 $|z(t)|$ は実は時刻 t によらずつねに一定の値であることを絶対値の性質から示し、その一定の値を求めよ。 $|z(t)| = \boxed{\text{オ}}$ 。

オ 4

$$(1)よりz\left(\frac{1}{8}\right) = 4i\text{なので}\left|z\left(\frac{1}{8}\right)\right| = |4i| = 4。$$

これが特定の時刻だけの値ではなく、つねに一定であることを示す。

$$|z(t)| = |4(\cos \omega t + i \sin \omega t)| = 4 \times |\cos \omega t + i \sin \omega t| = 4 \times \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = 4 \times 1$$

(羽根の先端は回転の中心からつねに4cmの距離にあるので、幾何的にも当然の結果である。 $t = \frac{1}{8}$ のときの値4とも一致する。)

$$\left|z\left(\frac{1}{8}\right)\right| = 4, |z(t)| = 4 \quad (\text{つねに一定} \cdot \text{オ} = 4)$$

大問3 目標時間 14分/配点 20点

花子さんは、公園にかかる橋のアーチが、楕円の一部の形をしていることに気づいた。地面を x 軸とし、アーチの中心の真下を原点とすると、アーチの断面 ($y \geq 0$ の部分) は $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ で近似できるという。アーチの最大の高さは3m、地面に接する2点は x 座標が ± 4 (m) である。

花子「この曲線の下面積を求めれば、アーチの断面積が分かるね。」

(1)

アーチの下 ($-4 \leq x \leq 4, 0 \leq y$) の面積 S を、置換積分 $x = 4 \sin \theta$ を用いて定積分で求めると、 $S = \boxed{\text{ア}}\pi$ (m²) である。アを求めよ。

ア 6

$$y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} \quad (y \geq 0) \quad \text{なので} \quad S = \int_{-4}^4 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} dx = \int_{-4}^4 \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2} dx$$

$$x = 4 \sin \theta \text{ とおくと } dx = 4 \cos \theta d\theta, \quad x : -4 \rightarrow 4 \text{ のとき } \theta : -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

$$\sqrt{16 - x^2} = 4 \cos \theta \quad (\cos \theta \geq 0 \text{ より}).$$

$$\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2} dx = \frac{3}{4} \times 4 \cos \theta \times 4 \cos \theta d\theta = 12 \cos^2 \theta d\theta$$

半角公式を使うと

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 12 \cos^2 \theta d\theta = 12 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 12 \times \frac{\pi}{2} = 6\pi$$

$$S = 6\pi \quad (\mathcal{A} = 6)$$

- (2) このアーチの奥行き（x軸に垂直な方向の厚み）が5mであるとき、アーチの下
の空間の体積 $V = S \times 5$ を求めると、 $V = \boxed{\text{イウ}}\pi$ (m³) である。イウを求
めよ。

イウ 30

(1)で求めた $S = 6\pi$ を使う。

$$V = S \times 5 = 6\pi \times 5 = 30\pi$$

$$V = 30\pi \quad (\text{イウ} = 30)$$

- (3) 花子「アーチの断面積が分かったから、断面の平均の高さも計算できるね。」(1)
で求めた面積 S を、アーチの底辺の長さ8m ($-4 \leq x \leq 4$ の範囲) で割ると、
断面の平均の高さが求まる。この平均の高さを求めると、 $\frac{S}{8} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$ (m) で
ある。エ、オを求めよ。

エ 3 オ 4

(1)で求めた $S = 6\pi$ を使う。

$$\frac{S}{8} = \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$$

断面の平均の高さは $\frac{3}{4}\pi\text{m}$ (エ= 3、オ= 4)

大問4 目標時間 14分/配点 20点

ドローンが、時刻 t (秒、 $0 \leq t \leq 4$) における位置ベクトル $\vec{p}(t) = (t - 1, 2t - 4, 3 - t)$ で飛行しているとする。

太郎「速度ベクトルを求めれば、原点にいちばん近づく時刻も計算できそうだね。」

(1) $t = 1$ 秒におけるドローンの位置の成分を求めよ。x成分 、y成分 、z成分 (負の成分は符号もつけて入力)。

ア 0 イ -2 ウ 2

$$\vec{p}(1) = (1 - 1, 2 \times 1 - 4, 3 - 1) = (0, -2, 2)$$

(0, -2, 2) (ア= 0、イ= -2、ウ= 2)

(2) 速度ベクトル $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$ を求めよ。x成分 、y成分 、z成分 (負の成分は符号もつけて入力)。

エ 1 オ 2 カ -1

各成分をそれぞれ t で微分する。

$$\frac{d}{dt}(t - 1) = 1, \quad \frac{d}{dt}(2t - 4) = 2, \quad \frac{d}{dt}(3 - t) = -1$$

(各成分が t の1次式なので、速度ベクトルは時刻によらず一定になる。)

$$\vec{v}(t) = (1, 2, -1) \text{ (エ= 1、オ= 2、カ= -1)}$$

(3) 花子「原点からの距離 $|\vec{p}(t)|$ が最小になる時刻では、位置ベクトル $\vec{p}(t)$ と(2)で求めた速度ベクトル $\vec{v}$ が垂直になっているはずだよ。」(2)の $\vec{v}$ を用いて、 $\vec{p}(t) \cdot \vec{v} = 0$ となる時刻 t を求めよ。また、そのときの原点からの距離を求めよ。 $t = \boxed{\text{キ}}$ 、距離 $= \sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ 。

キ 2 ク 2

距離の2乗 $f(t) = |\vec{p}(t)|^2 = \vec{p}(t) \cdot \vec{p}(t)$ を t で微分すると、内積の各成分に積の微分法を使って

$$f'(t) = 2\vec{p}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

となる ($\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ は(2)で求めた通り $(1, 2, -1)$ で一定)。 $f(t)$ が最小になる時刻は $f'(t) = 0$ 、すなわち $\vec{p}(t) \cdot \vec{v} = 0$ を満たす t である。

$$\begin{aligned}\vec{p}(t) \cdot \vec{v} &= (t-1) \times 1 + (2t-4) \times 2 + (3-t) \times (-1) \\ &= (t-1) + (4t-8) + (-3+t) = 6t-12\end{aligned}$$

$6t-12=0$ より $t=2$ ($0 \leq t \leq 4$ の範囲内)。

$t=2$ のときの位置は $\vec{p}(2) = (2-1, 2 \times 2-4, 3-2) = (1, 0, 1)$ 。

原点からの距離は $|\vec{p}(2)| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$t=2$ のとき、原点からの距離は最小値 $\sqrt{2}$ をとる (キ=2、ク=2)

大問5 目標時間 14分/配点 20点

太郎さんは、正六角形の歯車を複素数平面を使って設計している。歯車の頂点は、方程式 $z^6 = 64$ の解として表せる。

花子「歯の数を増やしていくと、隣り合う頂点はどんどん近づいていくはずだね。」

(1) $z^6 = 64$ の解はすべて絶対値が等しい。この値 $|z|$ を求めよ。 $\boxed{\text{ア}}$ 。

ア 2

$z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ とおくと、ド・モアブルの定理より $z^6 = r^6(\cos 6\phi + i \sin 6\phi)$ 。

これが64（絶対値64、偏角 0° の実数）と等しいので、絶対値を比べて $r^6 = 64$ 。
 $64 = 2^6$ なので $r = 2$ ($r > 0$)。

$$|z| = 2 \text{ (ア} = 2\text{)}$$

- (2) 解のうち偏角が 0° であるもの（正の実数解）を z_0 とする。 z_0 の値と、隣り合う解どうしの偏角の差（度）を求めよ。 $z_0 = \boxed{\text{イ}}$ 、偏角の差 $= \boxed{\text{ウエ}}^\circ$ 。

イ 2 ウエ 60

偏角 0° で絶対値2（(1)より）の解は、実数の正の値 $z_0 = 2$ そのもの（ $2^6 = 64$ で確認できる）。

6個の解は、絶対値2の円周上に等間隔（ 360° を6等分）に並ぶ。よって隣り合う解どうしの偏角の差は

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$z_0 = 2$ 、偏角の差 60° （イ $= 2$ 、ウ $= 60$ ）

- (3) 歯の数が n 個のとき、隣り合う頂点の偏角の差は $\frac{360^\circ}{n}$ である。 n を限りなく大きくするときの極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{360^\circ}{n}$ を求めよ。 $\boxed{\text{エ}}^\circ$ 。

エ 0

$\frac{360^\circ}{n}$ は、 n を限りなく大きくすると分母だけが限りなく大きくなるので、全体は限りなく0に近づく。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{360^\circ}{n} = 0^\circ$$

これは、歯の数を増やせば増やすほど、隣り合う頂点の間隔が限りなく狭くなり、歯車の形が円に限りなく近づいていく、という図形的な意味をもつ。

0° （エ $= 0$ ）

