

数II・B まとめテスト

解答（全62問）

氏名 _____

得点 _____ /62点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～25）

1

式と証明：3次式の展開

$(x - 3)^3$ を展開せよ。

x^2 の係数 -9 x の係数 27 定数項 -27

公式 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ を $a = x, b = 3$ で使う。

$$x^3 - 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times 3^2 - 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

$$(x - 3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$$

$x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ を $x + 1$ で割ったときの商を $ax^2 + bx + c$ 、余りを R とするとき、 a, b, c, R を求めよ。

$$a = \underline{1} \quad b = \underline{2} \quad c = \underline{-4} \quad R = \underline{9}$$

筆算で計算する。

$$x^3 \div x = x^2, x^2(x + 1) = x^3 + x^2, \text{引いて } 2x^2, -2x \text{ をおろして } 2x^2 - 2x。$$

$$2x^2 \div x = 2x, 2x(x + 1) = 2x^2 + 2x, \text{引いて } -4x, 5 \text{ をおろして } -4x + 5。$$

$$-4x \div x = -4, -4(x + 1) = -4x - 4, \text{引いて } 9。 \text{次数が } 0 \text{ になったので終了。}$$

$$\text{検算：}(x + 1)(x^2 + 2x - 4) + 9 = x^3 + 2x^2 - 4x + x^2 + 2x - 4 + 9 = x^3 + 3x^2 - 2x + 5。 \text{もとの式と一致する。}$$

$$\text{商 } x^2 + 2x - 4 \text{ (} a = 1, b = 2, c = -4 \text{)、余り } R = 9$$

$(2 + 3i)(4 - i)$ を計算せよ。

$$\text{実部 } \underline{11} \quad \text{虚部 } \underline{10}$$

分配法則で展開し、 $i^2 = -1$ を使う。

$$(2 + 3i)(4 - i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 8 + 10i + 3 = 11 + 10i$$

$$\text{実部 } 11, \text{虚部 } 10 \text{ (} 11 + 10i \text{)}$$

4

複素数と方程式：判別式と実数解の個数

$3x^2 - 2x + 5 = 0$ について、判別式 D の値と実数解の個数を求めよ。

$D = \underline{-56}$ 実数解の個数 $\underline{0}$ 個

$$a = 3, b = -2, c = 5$$

$$D = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 4 - 60 = -56 \quad D < 0 \text{ なので実数解はない (虚数解が 2 つ)}。$$

$$D = -56, \text{ 実数解は } 0 \text{ 個}$$

5

図形と方程式：2点間の距離

2点 $A(2, -1)$ 、 $B(7, 11)$ の間の距離を求めよ。

$$AB = \underline{13}$$

2点間の距離の公式（三平方の定理）を使う。

$$AB = \sqrt{(7-2)^2 + (11-(-1))^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$AB = 13$$

6

図形と方程式：内分点

2点 $A(2, -3)$ 、 $B(11, 15)$ を結ぶ線分を $2:1$ に内分する点の座標を求めよ。

x 座標 $\underline{8}$ y 座標 $\underline{9}$

$m:n = 2:1$ の内分点の公式 $\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$ を使う。

$$x = \frac{1 \times 2 + 2 \times 11}{2+1} = \frac{2+22}{3} = 8$$

$$y = \frac{1 \times (-3) + 2 \times 15}{2+1} = \frac{-3+30}{3} = 9$$

$$(8, 9)$$

7

図形と方程式：円の一般形→標準形

$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$ を標準形に直し、中心の座標と半径を求めよ。

中心 x 座標 4 中心 y 座標 -1 半径 3

x, y それぞれ平方完成する。

$$x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16, \quad y^2 + 2y = (y + 1)^2 - 1$$

$$(x - 4)^2 - 16 + (y + 1)^2 - 1 + 8 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

中心(4, -1)、半径3

8

三角関数：度→ラジアン

210° をラジアンで表すと $\frac{\square}{\square}\pi$ の形になる。 π を除いた分子・分母をそれぞれ答えよ。

分子 = 7 分母 = 6

$$180^\circ = \pi \text{ (ラジアン) なので、} 1^\circ = \frac{\pi}{180}.$$

$$210^\circ = 210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{210}{180}\pi = \frac{7}{6}\pi$$

$$210^\circ = \frac{7}{6}\pi \text{ (ラジアン)}$$

9

三角関数：単位円上の値（第3象限）

 $\theta = 210^\circ$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{-1/2} \quad \cos \theta = \underline{-\sqrt{3}/2}$$

$210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ 。単位円で第3象限の角なので、 30° の値をもとに符号だけ調整する。

$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \quad (\text{第3象限で}\sin\text{は負})$$

$$\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{第3象限で}\cos\text{は負})$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

10

三角関数：加法定理・基本

加法定理を用いて $\cos 15^\circ$ の値を求めよ ($15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ として計算せよ)。

$$\cos 15^\circ = \underline{(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4}$$

加法定理 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ を使う。

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

11

指数関数：有理数指数

 $27^{\frac{2}{3}}$ の値を求めよ。値 9

$$27^{\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$27^{\frac{2}{3}} = 9$$

12

対数関数：対数の性質（差）

 $\log_3 45 - \log_3 5$ の値を求めよ。値 2

対数の商の性質 $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$ を使う。

$$\log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

$$\log_3 45 - \log_3 5 = 2$$

13

指数関数：指数方程式

 $5^{x+2} = 125$ を満たす x の値を求めよ。 $x =$ 1

右辺を底5にそろえる。 $125 = 5^3$ なので

$$5^{x+2} = 5^3$$

底が等しく指数関数は単調なので、指数どうしを比較できる。

$$x + 2 = 3 \quad \text{よって} \quad x = 1$$

$$x = 1$$

14

微分法：導関数の公式

 $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。 x^2 の係数 9 x の係数 -8

$(x^n)' = nx^{n-1}$ を各項に使う。

$$f'(x) = 3 \times 3x^2 - 4 \times 2x + 0 = 9x^2 - 8x$$

$$f'(x) = 9x^2 - 8x$$

15

微分法：接線の方程式

$y = x^2 - 6x + 3$ の $x = 4$ における接線の方程式を、傾きと y 切片で答えよ。

傾き 2 y 切片 -13

$y' = 2x - 6$ なので、 $x = 4$ での傾きは $2 \times 4 - 6 = 2$ 。

接点の y 座標は $y(4) = 16 - 24 + 3 = -5$ 。

接線： $y - (-5) = 2(x - 4)$ 整理すると $y = 2x - 8 - 5 = 2x - 13$

傾き2、 y 切片-13 (接線 $y = 2x - 13$)

16

微分法：増減表→極値

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ の極大値と極小値を求めよ。

極大値 6 ($x =$ 1 $)$ 極小値 2 ($x =$ 3 $)$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$

$f'(x) = 0$ より $x = 1, 3$

増減表を作ると、 $x = 1$ の前後で f' は正から負に変わるので極大、 $x = 3$ の前後で負から正に変わるので極小。

$f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$

$f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$

$x = 1$ で極大値6、 $x = 3$ で極小値2

17

積分法：定積分の基本計算

$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx$ の値を求めよ。

値 2

不定積分は $x^3 - 2x^2 + x$ 。

$$\left[x^3 - 2x^2 + x \right]_0^2 = (8 - 8 + 2) - 0 = 2$$

2

18

数列：等差数列の一般項

初項5、公差3の等差数列 $\{a_n\}$ の第10項 a_{10} を求めよ。

$a_{10} =$ 32

等差数列の一般項 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ を使う。

$$a_{10} = 5 + (10 - 1) \times 3 = 5 + 27 = 32$$

$a_{10} = 32$

19

数列：等比数列の和

初項3、公比2の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第6項までの和 S_6 を求めよ。

$S_6 =$ 189

等比数列の和の公式 $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ ($r \neq 1$) を使う。

$$S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \times 63 = 189$$

$S_6 = 189$

20

数列： Σ の公式

$\sum_{k=1}^7 k^2$ の値を求めよ。

値 140

Σ 公式 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ に $n=7$ を代入する。

$$\frac{1}{6} \times 7 \times 8 \times 15 = \frac{840}{6} = 140$$

140

21

数列：階差数列

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$ を満たすとき、 a_5 の値を求めよ。

 $a_5 =$ 25

階差の関係を使って、 a_1 から順に足していく。

$$a_2 = a_1 + (2 \times 1 + 1) = 1 + 3 = 4$$

$$a_3 = a_2 + (2 \times 2 + 1) = 4 + 5 = 9$$

$$a_4 = a_3 + (2 \times 3 + 1) = 9 + 7 = 16$$

$$a_5 = a_4 + (2 \times 4 + 1) = 16 + 9 = 25$$

(実はこの数列は $a_n = n^2$ になっている。 $5^2 = 25$ で一致することからも検算できる。)

$$a_5 = 25$$

確率変数 X が1, 2, 3の値をとり、それぞれの確率が0.2, 0.5, 0.3であるとき、期待値 $E(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{2.1}$$

期待値の定義 $E(X) = \sum x_i p_i$ を使う。

$$E(X) = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.5 + 3 \times 0.3 = 0.2 + 1.0 + 0.9 = 2.1$$

$$E(X) = 2.1$$

確率変数 X が1, 3, 5の値をとり、それぞれの確率が0.3, 0.4, 0.3であるとき、期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{3} \quad V(X) = \underline{2.4}$$

$$E(X) = 1 \times 0.3 + 3 \times 0.4 + 5 \times 0.3 = 0.3 + 1.2 + 1.5 = 3$$

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ を使う。

$$E(X^2) = 1^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.4 + 5^2 \times 0.3 = 0.3 + 3.6 + 7.5 = 11.4$$

$$V(X) = 11.4 - 3^2 = 11.4 - 9 = 2.4$$

$$E(X) = 3, V(X) = 2.4$$

確率変数 X が二項分布 $B(50, 0.2)$ に従うとき、期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{10} \quad V(X) = \underline{8}$$

二項分布 $B(n, p)$ の公式 $E(X) = np$ 、 $V(X) = np(1 - p)$ を使う。

$$E(X) = 50 \times 0.2 = 10$$

$$V(X) = 50 \times 0.2 \times 0.8 = 8$$

$$E(X) = 10, V(X) = 8$$

確率変数 X が正規分布 $N(50, 10^2)$ に従うとき、 $X = 65$ を標準化した値 $z = \frac{X - 50}{10}$ を求めよ。

$$z = \underline{1.5}$$

標準化の公式 $z = \frac{X - m}{\sigma}$ (m は平均、 σ は標準偏差) に $X = 65$, $m = 50$, $\sigma = 10$ を代入する。

$$z = \frac{65 - 50}{10} = \frac{15}{10} = 1.5$$

$$z = 1.5$$

26

式と証明：相加相乗平均

$a > 0$ のとき、 $a + \frac{16}{a}$ の最小値を求めよ。

最小値 8 そのとき $a =$ 4

$a > 0$ より $\frac{16}{a} > 0$ なので、相加平均・相乗平均の関係が使える。

$$a + \frac{16}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{16}{a}} = 2\sqrt{16} = 8$$

等号は $a = \frac{16}{a}$ のとき。両辺に a をかけて $a^2 = 16$ 、 $a > 0$ より $a = 4$ 。

$a = 4$ のとき最小値 8

27

式と証明：恒等式の未知係数

等式 $a(x-1)^2 + b(x-1) + c = x^2 + 2$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を求めよ。

$a =$ 1 $b =$ 2 $c =$ 3

左辺を展開して x について整理する。

$$a(x-1)^2 + b(x-1) + c = a(x^2 - 2x + 1) + b(x-1) + c = ax^2 + (-2a + b)x + (a - b + c)$$

これが $x^2 + 0 \cdot x + 2$ と恒等的に等しいので、両辺の係数を比較する。

$$x^2 \text{ の係数 : } a = 1$$

$$x \text{ の係数 : } -2a + b = 0 \quad \text{より} \quad b = 2a = 2$$

$$\text{定数項 : } a - b + c = 2 \quad \text{より} \quad 1 - 2 + c = 2, \quad c = 3$$

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3$$

2次方程式 $x^2 - 7x + 11 = 0$ の2つの解を α, β とする。解を求めずに、解と係数の関係を用いて $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。

$$\alpha^2 + \beta^2 = \underline{\underline{27}}$$

$a = 1, b = -7, c = 11$ なので、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{-7}{1} = 7, \alpha\beta = \frac{11}{1} = 11$$

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ を変形すると

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 7^2 - 2 \times 11 = 49 - 22 = 27$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 27$$

整式 $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$ を $(x - 1)(x + 3)$ で割った余りを $ax + b$ とするとき、 a, b の値を求めよ。

$$a = \underline{\underline{2}} \quad b = \underline{\underline{4}}$$

割り算の等式より $P(x) = (x - 1)(x + 3)Q(x) + ax + b$ ($Q(x)$ は商)。

$x = 1$ を代入すると $(x - 1)(x + 3)$ の部分が 0 になるので $P(1) = a + b$ 。

$$P(1) = 1 + 2 - 1 + 4 = 6 \quad \text{よって } a + b = 6 \quad \cdots(1)$$

$x = -3$ を代入すると同様に $P(-3) = -3a + b$ 。

$$P(-3) = -27 + 18 + 3 + 4 = -2 \quad \text{よって } -3a + b = -2 \quad \cdots(2)$$

(1)-(2) : $4a = 8 \quad a = 2$ 。(1) に代入して $b = 4$ 。

検算 : $a + b = 2 + 4 = 6$ (一致)、 $-3a + b = -6 + 4 = -2$ (一致)。

$$a = 2, b = 4$$

方程式 $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$ を解け（虚数解はコンマ区切りで入力）。

実数解 $x = \underline{2}$ 虚数解 $x = \underline{1+i, 1-i}$

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ とおく。定数項 -4 の約数の中から探すと

$$P(2) = 8 - 16 + 12 - 4 = 0$$

なので、因数定理より $P(x)$ は $x - 2$ を因数にもつ。

実際に割り算すると $P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 2)$ （筆算・検算で確認できる）。

$x^2 - 2x + 2 = 0$ を解の公式（ b' の公式）で解く。

$$b' = -1, \quad b'^2 - ac = (-1)^2 - 1 \times 2 = 1 - 2 = -1$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{-1}}{a} = 1 \pm i$$

$$x = 2, 1 + i, 1 - i$$

円 $x^2 + y^2 = 25$ 上の点 $(3, -4)$ における接線の方程式を、傾きと y 切片で答えよ。

傾き $\underline{3/4}$ y 切片 $\underline{-25/4}$

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の公式は $x_1x + y_1y = r^2$ 。

$$3x - 4y = 25$$

$$\text{整理すると } y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}。$$

$$\text{傾き } \frac{3}{4}, \quad y \text{ 切片 } -\frac{25}{4} \quad (\text{接線 } 3x - 4y = 25)$$

2点 $A(0, 0)$ 、 $B(9, 0)$ から、 $PA : PB = 2 : 1$ となるように動く点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。円の中心の座標と半径を答えよ。

中心 x 座標 12 中心 y 座標 0 半径 6

条件 $PA : PB = 2 : 1$ より $PA = 2PB$ 。両辺を2乗して $PA^2 = 4PB^2$ とすれば根号が消える。

$$x^2 + y^2 = 4\{(x - 9)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 = 4x^2 - 72x + 324 + 4y^2$$

$$0 = 3x^2 - 72x + 324 + 3y^2$$

両辺を3で割って $x^2 - 24x + 108 + y^2 = 0$ 、 x について平方完成する。

$$(x - 12)^2 - 144 + 108 + y^2 = 0$$

$$(x - 12)^2 + y^2 = 36$$

中心 $(12, 0)$ 、半径6の円

直線 $l : 3x + 4y - 12 = 0$ について、点 $(2, 5)$ から l までの距離と、原点を通り l に垂直な直線の傾きを求めよ。

距離 14/5 垂直な直線の傾き 4/3

点と直線の距離の公式 $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を、直線 $3x + 4y - 12 = 0$ ($a = 3, b = 4, c = -12$) と点 $(2, 5)$ に使う。

$$\text{距離} = \frac{|3 \times 2 + 4 \times 5 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 20 - 12|}{5} = \frac{14}{5}$$

垂直な2直線の傾きの積は -1 になる。 l の傾きは $-\frac{3}{4}$ なので、垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{3}{4} \times m = -1 \quad m = \frac{4}{3}$$

距離 $\frac{14}{5}$ 、垂直な直線の傾きは $\frac{4}{3}$

$\sin \theta = \frac{5}{13}$ 、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\sin 2\theta$ 、 $\cos 2\theta$ の値を求めよ。

$$\sin 2\theta = \underline{\underline{120/169}} \quad \cos 2\theta = \underline{\underline{119/169}}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $\cos \theta > 0$ 。相互関係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

2倍角の公式を使う。

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{5}{13} \times \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \times \frac{25}{169} = 1 - \frac{50}{169} = \frac{119}{169}$$

$$\sin 2\theta = \frac{120}{169}, \cos 2\theta = \frac{119}{169}$$

$\sin \theta + \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に合成せよ ($0 \leq \alpha < 2\pi$)。

$$r = \underline{\underline{\sqrt{2}}} \quad \alpha = \underline{\underline{\pi/4}}$$

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ を満たす } \alpha \text{ は } \alpha = \frac{\pi}{4}。$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $2 \sin \theta - 1 = 0$ を解け（答えが2つあるときはコンマ区切りで入力）。

$$\theta = \underline{\pi/6, 5\pi/6}$$

$$2 \sin \theta - 1 = 0 \text{ より } \sin \theta = \frac{1}{2}。$$

単位円で y 座標が $\frac{1}{2}$ になる角を、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲ですべて求める。第1象限と第2象限に1つずつある。

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$\log_3(x+1) + \log_3(x-1) < 2$ を解け。

$$x \text{ の範囲は下端} = \underline{1} \quad \text{上端} = \underline{\sqrt{10}}$$

$$\text{真数条件：} x+1 > 0 \text{ かつ } x-1 > 0 \text{ より } x > 1 \quad \cdots(1)$$

左辺を1つの対数にまとめる。

$$\log_3(x+1)(x-1) < 2 = \log_3 9$$

底3は1より大きいので、対数は単調増加。真数どうしを比較できる。

$$(x+1)(x-1) < 9$$

$$x^2 - 1 < 9$$

$$x^2 < 10$$

$$-\sqrt{10} < x < \sqrt{10} \quad \cdots(2)$$

(1)と(2)の共通範囲をとる。

$$1 < x < \sqrt{10}$$

$\log_{10} 3 = 0.4771$ として、 3^{50} は何桁の数か求めよ。

桁数 24 桁

$$\log_{10} 3^{50} = 50 \log_{10} 3 = 50 \times 0.4771 = 23.855$$

$23 \leq \log_{10} 3^{50} < 24$ なので、 $10^{23} \leq 3^{50} < 10^{24}$ 。これは24桁の数であることを意味する（一般に $\log_{10} N$ の整数部分に1を足した値が N の桁数）。

24桁

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ ($-2 \leq x \leq 3$) の最大値・最小値を求めよ。

最大値 7 ($x = \underline{-1}$) 最小値 -20 ($x = \underline{2}$)

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$ 。区間 $[-2, 3]$ の中にある極値は $x = -1$ （極大）、 $x = 2$ （極小）。

候補点（両端点と極値の x ）をすべて調べる。

$$f(-2) = 2 \times (-8) - 3 \times 4 - 12 \times (-2) = -16 - 12 + 24 = -4$$

$$f(-1) = 2 \times (-1) - 3 \times 1 - 12 \times (-1) = -2 - 3 + 12 = 7$$

$$f(2) = 2 \times 8 - 3 \times 4 - 12 \times 2 = 16 - 12 - 24 = -20$$

$$f(3) = 2 \times 27 - 3 \times 9 - 12 \times 3 = 54 - 27 - 36 = -9$$

比べると、最大は $x = -1$ の7。最小は $x = 2$ の-20。

$x = -1$ で最大値7、 $x = 2$ で最小値-20

放物線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

面積 9/2

交点を求める。 $x^2 - 2x = x$ より $x^2 - 3x = 0$ 、 $x(x - 3) = 0$ 、 $x = 0, 3$ 。

$0 \leq x \leq 3$ では $x \geq x^2 - 2x$ （例えば $x = 1$ で $1 > 1 - 2 = -1$ ）なので、上側の曲線は $y = x$ 。

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \int_0^3 \{x - (x^2 - 2x)\} dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \\ &= \left(\frac{27}{2} - 9 \right) - 0 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\text{面積} = \frac{9}{2}$$

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = 3a_n + 4$ を満たすとき、 a_4 の値を求めよ。

$a_4 =$ 79

$\alpha = 3\alpha + 4$ を満たす α を求めると $\alpha = -2$ 。両辺から -2 を引く形に変形する。

$$a_{n+1} - (-2) = 3\{a_n - (-2)\} \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} + 2 = 3(a_n + 2)$$

数列 $\{a_n + 2\}$ は初項 $a_1 + 2 = 3$ 、公比3の等比数列なので

$$a_n + 2 = 3 \times 3^{n-1} = 3^n \quad \text{よって} \quad a_n = 3^n - 2$$

$$a_4 = 3^4 - 2 = 81 - 2 = 79$$

$$a_4 = 79 \quad (\text{一般項は} a_n = 3^n - 2)$$

$\sum_{k=1}^{10} k(k+1)$ の値を求めよ。

値 440

$k(k+1) = k^2 + k$ と展開してから、Σを分ける。

$$\sum_{k=1}^{10} k(k+1) = \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k$$

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21 = 385$$

$$\sum_{k=1}^{10} k = \frac{1}{2} \times 10 \times 11 = 55$$

$$385 + 55 = 440$$

(この等式 $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ は数学的帰納法でも証明できる。 $n = 10$ を代入すると $\frac{10 \times 11 \times 12}{3} = 440$ で一致する。)

440

43

数列：いろいろな数列（部分分数分解して和をとる）

$\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k(k+1)}$ の値を求めよ。

値 5/6

部分分数分解 $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ を使うと、途中の項が打ち消し合う。

$$\sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

44

統計的な推測：二項分布の確率計算

確率変数 X が二項分布 $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ に従うとき、 $P(X=2)$ を求めよ。

$P(X=2) =$ 8/27

二項分布の確率 $P(X=k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$ を使う。

$$P(X=2) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

$$P(X=2) = \frac{8}{27}$$

確率変数 X が正規分布 $N(60, 8^2)$ に従うとき、 $P(60 \leq X \leq 68)$ を求めよ。正規分布表より $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ とする。

$$P(60 \leq X \leq 68) = \underline{\underline{0.3413}}$$

X を標準化する。 $X = 68$ のとき

$$z = \frac{68 - 60}{8} = 1$$

$X = 60$ は平均そのものなので $z = 0$ 。よって

$$P(60 \leq X \leq 68) = P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$$

$$0.3413$$

ある母集団から大きさ100の標本を無作為抽出したところ、標本比率が0.5であった。母比率 p に対する信頼度95%の信頼区間を求めよ（ $1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ を計算せよ）。

$$\text{下端} = \underline{\underline{0.402}} \quad \text{上端} = \underline{\underline{0.598}}$$

信頼区間の公式 $\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ に $\hat{p} = 0.5$, $n = 100$ を代入する。

$$\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{100}} = \sqrt{0.0025} = 0.05$$

$$1.96 \times 0.05 = 0.098$$

$$0.5 - 0.098 = 0.402, 0.5 + 0.098 = 0.598$$

$$0.402 \leq p \leq 0.598$$

円 $x^2 + y^2 = 9$ 上の点を $P(3 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とする。 $x + y$ (x, y は点 P の座標) の最大値と、そのときの θ を求めよ。

最大値 $3\sqrt{2}$ そのとき $\theta =$ $\pi/4$

点 P の座標を代入すると

$$x + y = 3 \cos \theta + 3 \sin \theta$$

これを三角関数の合成で1本のsinにまとめる。

$$r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{を満たす } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{なので}$$

$$3 \sin \theta + 3 \cos \theta = 3\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

sinの最大値は1なので、最大値は $3\sqrt{2}$ 。等号は $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき
(これは $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に入っている)。

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{のとき最大値} 3\sqrt{2}$$

2次方程式 $x^2 - 6x + 13 = 0$ の解を α, β とする。恒等式 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ を用いて、 $\alpha^3 + \beta^3$ の値を求めよ。

$$\alpha^3 + \beta^3 = \underline{\underline{-18}}$$

この方程式は判別式 $D = 36 - 52 = -16 < 0$ なので、 α, β は共役な虚数である。しかし解と係数の関係は実数解のときと同じ形のまま使える。

$$\alpha + \beta = -\frac{-6}{1} = 6, \alpha\beta = \frac{13}{1} = 13$$

恒等式 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ に代入する（この恒等式は、式と証明の章で学んだ3次の乗法公式 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ を変形して導いたものである）。

$$\alpha^3 + \beta^3 = 6^3 - 3 \times 13 \times 6 = 216 - 234 = -18$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = -18$$

1個のさいころを1回投げて出た目を X とする。数列の章のΣ公式を使って、 $E(X^2)$ の値を求めよ。

$$E(X^2) = \underline{\underline{91/6}}$$

さいころの目は1から6まで、それぞれ確率 $\frac{1}{6}$ で出る。期待値の定義より

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^6 k^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k^2$$

Σ公式 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ に $n=6$ を代入する。

$$\sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{1}{6} \times 6 \times 7 \times 13 = 91$$

$$E(X^2) = \frac{91}{6}$$

$$E(X^2) = \frac{91}{6}$$

x がすべての実数を動くとき、 $3^x + 3^{2-x}$ の最小値を、相加平均・相乗平均の関係を用いて求めよ。

最小値 6 そのとき $x =$ 1

$t = 3^x$ とおく。指数関数の性質より、 x がすべての実数を動くとき t はつねに正の実数を動く ($t > 0$)。

$$3^{2-x} = \frac{3^2}{3^x} = \frac{9}{t} \text{なので}$$

$$3^x + 3^{2-x} = t + \frac{9}{t}$$

$t > 0$ より $\frac{9}{t} > 0$ なので、相加平均・相乗平均の関係が使える。

$$t + \frac{9}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{9}{t}} = 2\sqrt{9} = 6$$

等号は $t = \frac{9}{t}$ のとき、すなわち $t^2 = 9$, $t > 0$ より $t = 3$ 。このとき $3^x = 3$ なので $x = 1$ 。

$x = 1$ のとき最小値6

51

総合：微分法×複素数と方程式（単調性と虚数解）

3次方程式 $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$ について、 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ の導関数 $f'(x)$ がつねに正であることを示し、実数解がただ1つであることを説明せよ。そのうえで、実数解と残り2つの解（虚数解）をすべて求めよ（虚数解はコンマ区切りで入力）。

実数解 $x = \underline{1}$ 虚数解 $x = \underline{1+2i, 1-2i}$

まず $f'(x)$ を計算する。

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 7$$

この2次式の判別式は $D = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 7 = 36 - 84 = -48 < 0$ 。判別式が負で x^2 の係数が正なので、この2次式はつねに正である。したがって $f'(x) = 3x^2 - 6x + 7 > 0$ がすべての x で成り立ち、 $f(x)$ はつねに増加する関数である。増加し続ける関数のグラフは x 軸とちょうど1回しか交わらないので、実数解はただ1つ。

その実数解を因数定理で探す。定数項 -5 の約数を試すと

$$f(1) = 1 - 3 + 7 - 5 = 0$$

なので $x = 1$ が実数解。

割り算すると $f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 5)$ （筆算・検算で確認できる）。残りの解は $x^2 - 2x + 5 = 0$ を解く。

$$b' = -1, b'^2 - ac = (-1)^2 - 1 \times 5 = 1 - 5 = -4$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{-4}}{a} = 1 \pm 2i$$

実数解 $x = 1$ 、虚数解 $x = 1 + 2i, 1 - 2i$

$f(\theta) = 3 \cos \theta + 4 \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を合成して、最大値を求めよ。

最大値 5

$f(\theta) = 4 \sin \theta + 3 \cos \theta$ と並べ替えて、 $a \sin \theta + b \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$ の形の合成公式を使う ($a = 4, b = 3$)。

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{4}{5}, \sin \alpha = \frac{b}{r} = \frac{3}{5} \text{ を満たす角を } \alpha \text{ とすると}$$

$$f(\theta) = 4 \sin \theta + 3 \cos \theta = 5 \sin(\theta + \alpha)$$

$\sin$ の値は -1 以上 1 以下なので、 $f(\theta) = 5 \sin(\theta + \alpha)$ の最大値は、 $\sin(\theta + \alpha) = 1$ のときの 5 である ($\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ となる θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に必ず存在する)。

(検算: $\sin(\theta + \alpha) = 1$ のとき、 $\sin \theta = \cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \theta = \sin \alpha = \frac{3}{5}$ であることが加法定理からわかる。これを $f(\theta)$ に代入すると $f(\theta) = 4 \times \frac{4}{5} + 3 \times \frac{3}{5} = \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = \frac{25}{5} = 5$ となり、たしかに一致する。)

最大値5

すべての自然数 n について、等式

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ（ $n = k$ から $n = k + 1$ に進む式変形では、式と証明の章で学んだ3次式の展開公式 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ の考え方を使って、両辺がきちんと一致することを丁寧に示すこと）。

[1] $n = 1$ のとき。左辺 $= 1^3 = 1$ 、右辺 $= \left\{ \frac{1 \times 2}{2} \right\}^2 = 1^2 = 1$ 。両辺が一致するので、 $n = 1$ で成り立つ。

[2] $n = k$ のとき成り立つ、すなわち

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2$$

が成り立つと仮定する。この仮定のもとで、 $n = k + 1$ のときも成り立つことを示す。

$n = k + 1$ のときの左辺は、仮定した等式の両辺に $(k + 1)^3$ を加えたものである。

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 = \left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2 + (k + 1)^3$$

右辺を目標の形 $\left\{ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right\}^2$ と一致するように整理する。共通因数 $(k + 1)^2$ でくくり出す。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{k(k+1)}{2} \right\}^2 + (k+1)^3 &= (k+1)^2 \left\{ \frac{k^2}{4} + (k+1) \right\} = (k+1)^2 \times \\ \frac{k^2 + 4k + 4}{4} &= (k+1)^2 \times \frac{(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

（ここで $k^2 + 4k + 4$ が $(k + 2)^2$ に等しいことは、3次式の展開で使う「差をとって整理する」発想と同じく、いったん式を丁寧に展開・整理して確かめる。実際 $(k + 2)^2 = k^2 + 2 \times k \times 2 + 2^2 = k^2 + 4k + 4$ で一致する。）

これは

$$= \left\{ \frac{(k+1)(k+2)}{2} \right\}^2$$

と書き直せる。これは $n = k + 1$ のときに求める右辺の形とちょうど一致する。

[1][2]より、数学的帰納法によって、すべての自然数 n についてこの等式は成り立つ。

$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ がすべての自然数 n で成り立つ ($n = 1$ で成立を確認し、 $n = k$ での成立を仮定して $n = k + 1$ での成立を、3次式の展開・整理によって示した)。

54

総合：統計的な推測×数列（二項分布の分散とΣの考え方）

確率変数 X が二項分布 $B\left(8, \frac{1}{4}\right)$ に従うとき、分散 $V(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

$$V(X) = \underline{\underline{3/2}} \quad \sigma(X) = \underline{\underline{\sqrt{6}/2}}$$

二項分布 $B(n, p)$ に従う X は、1回ごとの試行結果を表す確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ （それぞれ0か1の値をとる）の和 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とみなせる。数列の章で「同じものを n 個足す」という和の構造をΣで扱った発想がここでも使われており、公式 $V(X) = np(1 - p)$ はこの和の構造から導かれる。

$n = 8, p = \frac{1}{4}$ を代入する。

$$V(X) = 8 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{8 \times 3}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

標準偏差は分散の正の平方根。

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$V(X) = \frac{3}{2}, \sigma(X) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

元金10万円を年利5%（1.05倍）の複利で運用するとき、 n 年後の元利合計は 10×1.05^n （万円）と表せる（等比数列の一般項と同じ形である）。

$\log_{10} 1.05 = 0.0212$ 、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ として、元利合計が初めて20万円を超えるのは何年後か求めよ。

初めて20万円を超えるのは 15 年後

条件は $10 \times 1.05^n > 20$ 、すなわち $1.05^n > 2$ 。

両辺の常用対数をとる（底10は1より大きいので、対数は単調増加、不等号の向きは変わらない）。

$$n \log_{10} 1.05 > \log_{10} 2$$

$$0.0212 n > 0.3010$$

$$n > \frac{0.3010}{0.0212} = 14.198 \dots$$

n は自然数なので、これを満たす最小の n は $n = 15$ 。

15年後

3次関数 $y = 2x^3 - x$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ。また、点 $(0, 9)$ からその接線までの距離を求めよ。

接線の傾き 5 距離 $\sqrt{26}/2$

$y' = 6x^2 - 1$ なので、 $x = 1$ での傾きは $6 \times 1 - 1 = 5$ 。接点は $(1, 1)$ ($y(1) = 2 - 1 = 1$)。

接線： $y - 1 = 5(x - 1)$ すなわち $y = 5x - 5 + 1 = 5x - 4$ 、整理すると $5x - y - 4 = 0$ 。

点と直線の距離の公式 $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を、直線 $5x - y - 4 = 0$ ($a = 5, b = -1, c = -4$) と点 $(0, 9)$ に使う。

$$\text{距離} = \frac{|5 \times 0 - 1 \times 9 - 4|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{|-13|}{\sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{13\sqrt{26}}{26} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

接線の傾き 5 ($y = 5x - 4$)、距離は $\frac{\sqrt{26}}{2}$

$x > 0, y > 0$ で $3x + 2y = 12$ のとき、相加平均・相乗平均の関係を用いて xy の最大値を求めよ。さらに、直線 $3x + 2y = 12$ と x 軸・ y 軸で囲まれる三角形の面積を求めよ。

xy の最大値 6 三角形の面積 12

$3x > 0, 2y > 0$ なので、相加平均・相乗平均の関係が使える。

$$3x + 2y \geq 2\sqrt{3x \cdot 2y} = 2\sqrt{6xy}$$

条件 $3x + 2y = 12$ を代入すると $12 \geq 2\sqrt{6xy}$ 、よって $\sqrt{6xy} \leq 6$ 。両辺とも0以上なので2乗して $6xy \leq 36$ 、すなわち $xy \leq 6$ 。

等号は $3x = 2y$ のとき。これと $3x + 2y = 12$ を合わせると $2y + 2y = 12$ 、 $y = 3$ 、 $x = 2$ 。実際 $xy = 2 \times 3 = 6$ で最大値が実現している。

三角形について。直線 $3x + 2y = 12$ は x 軸と $y = 0$ のとき $x = 4$ の点 $(4, 0)$ で、 y 軸と $x = 0$ のとき $y = 6$ の点 $(0, 6)$ で交わる。原点・ $(4, 0)$ ・ $(0, 6)$ を頂点とする直角三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$$

xy の最大値は6 ($x = 2, y = 3$ のとき)、三角形の面積は12

確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき、確率の総和 $\sum_{k=0}^n P(X = k) = {}_nC_0p^0(1-p)^n + {}_nC_1p^1(1-p)^{n-1} + \cdots + {}_nC_np^n(1-p)^0$ が、つねに1になることを、式と証明の章で学んだ二項定理を用いて説明せよ。

二項定理は、 $a + b$ の n 乗を展開する公式である。

$$(a + b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_nb^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k a^{n-k} b^k$$

ここで $a = (1 - p)$ 、 $b = p$ において二項定理を適用すると

$$\{(1 - p) + p\}^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k (1 - p)^{n-k} p^k$$

右辺は、 $k = 0$ から $k = n$ までの ${}_nC_k p^k (1 - p)^{n-k}$ の和であり、これはちょうど二項分布の確率 $P(X = k)$ の総和 $\sum_{k=0}^n P(X = k)$ そのものである。

一方、左辺は $(1 - p) + p = 1$ なので $1^n = 1$ 。

したがって

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = \{(1 - p) + p\}^n = 1^n = 1$$

がつねに成り立つ。つまり、二項定理という式と証明の章の道具が、統計的な推測の章で「確率の総和は必ず1になる」という当然に思える性質を、計算によってきちんと裏付けている。

二項定理 $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k a^{n-k} b^k$ に $a = 1 - p$ 、 $b = p$ を代入すると $\{(1 - p) + p\}^n = 1^n = 1$ となり、これがそのまま確率の総和 $\sum_{k=0}^n P(X = k)$ に一致するので、総和は必ず1になる。

$\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{6} + \sin \frac{3\pi}{6} + \sin \frac{4\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{6\pi}{6}$ の値を求めよ。

値 $2+\sqrt{3}$

数列の和のように、6個の項を単位円上の値として1つずつ求めて合計する。

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin \frac{2\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{3\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

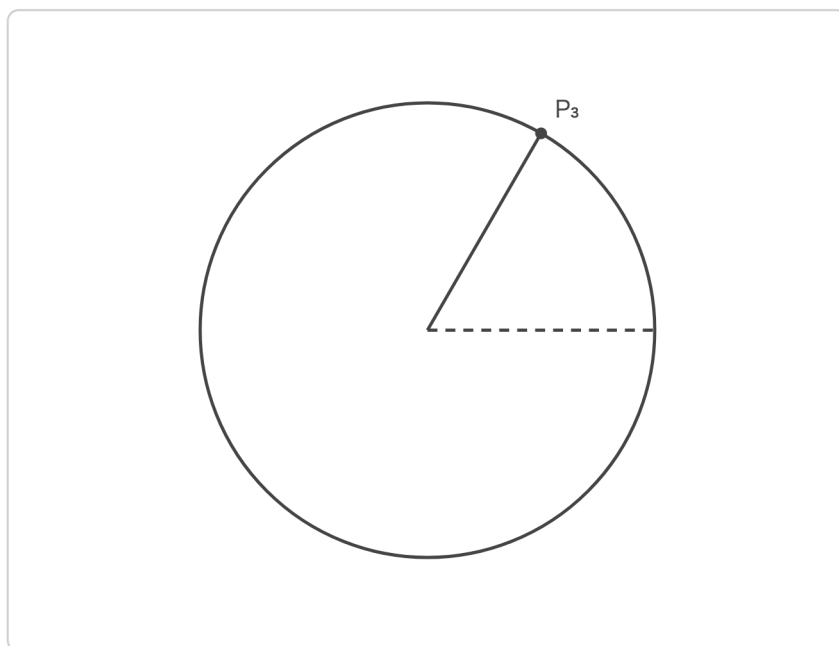
$$\sin \frac{4\pi}{6} = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin \frac{6\pi}{6} = \sin \pi = 0$$

すべて足し合わせる。

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 + 0 = 1 + \sqrt{3} + 1 = 2 + \sqrt{3}$$

$$2 + \sqrt{3}$$

円 $C: x^2 + y^2 = 25$ 上を反時計回りに動く点 P_n について、原点 O と点 P_n を結ぶ動径 OP_n の表す角（ラジアン）を、時刻 n ($n = 1, 2, 3, \dots$) ごとに数列 $\{\theta_n\}$ で表す。 $\{\theta_n\}$ は初項 $\theta_1 = 0$ 、公差 $\frac{\pi}{6}$ の等差数列である。時刻 n での点 P_n の座標は $P_n(5 \cos \theta_n, 5 \sin \theta_n)$ である。(1) θ_5 の値を求めよ。(2) P_3 の座標を求めよ。(3) 直線 OP_3 (O は原点) の傾きを求めよ。



円 C 上を、動径の表す角が等差数列になるように反時計回りに動く点 P_n 。 P_3 は動径 OP_3 の表す角が $\pi/3$ の位置にある。

(1) $\theta_5 = \underline{2\pi/3}$ (2) P_3 の x 座標 $\underline{5/2}$ y 座標 $\underline{5\sqrt{3}/2}$ (3) 傾き $\underline{\sqrt{3}}$

(1) 等差数列の一般項 $\theta_n = \theta_1 + (n-1)d$ を使う。 $\theta_1 = 0$, $d = \frac{\pi}{6}$ なので

$$\theta_5 = 0 + (5-1) \times \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

(2) 同様に $\theta_3 = 0 + (3-1) \times \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 。単位円の値を使って

$$P_3 = \left(5 \cos \frac{\pi}{3}, 5 \sin \frac{\pi}{3} \right) = \left(5 \times \frac{1}{2}, 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2} \right)$$

(3) 原点 $O(0, 0)$ と $P_3 \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2} \right)$ を結ぶ直線の傾きは

$$\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2} - 0}{\frac{5}{2} - 0} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{5} = \sqrt{3}$$

(円上の点を、動径の表す角が等差数列になるように追いかけると、その座標は三角関数の単位円の値そのものになる。数列・図形と方程式・三角関数という3つの章の道具が、この1つの問題の中で自然につながっている。)

$$(1) \theta_5 = \frac{2\pi}{3} \quad (2) P_3 = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2} \right) \quad (3) \text{傾き } \sqrt{3}$$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

「要点の総整理」で見た通り、最大値・最小値を求める武器は式の見ただけで選び分ける。次の2つの関数について、(a)相加平均・相乗平均の関係、(b)三角関数の合成のどちらを使うのが適切かをそれぞれ判断し、その理由を説明したうえで、実際に最大値または最小値を求めよ。(a) $x > 0$ のとき、 $f(x) = x + \frac{9}{x}$ の最小値 (b) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $g(\theta) = 3 \sin \theta + 4 \cos \theta$ の最大値

(a) $f(x) = x + \frac{9}{x}$ は、 $x > 0$ より x と $\frac{9}{x}$ がどちらも正の数で、掛けると $x \times \frac{9}{x} = 9$ という定数になっている。この「正の数どうしの和で、積が一定」という形は相加平均・相乗平均の関係を使う典型パターンなので、これを選ぶ。(三角関数の合成は $\sin$ や $\cos$ が入っていないので使えない。微分でも解けるが、この形なら相加相乗の方が速い。)

相加平均・相乗平均の関係より

$$x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{9}{x}} = 2\sqrt{9} = 6$$

等号成立は $x = \frac{9}{x}$ のとき、すなわち $x^2 = 9$ 。 $x > 0$ より $x = 3$ 。

よって $f(x)$ の最小値は 6 ($x = 3$ のとき)。

(b) $g(\theta) = 3 \sin \theta + 4 \cos \theta$ は、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ が混ざった 1 次式の和になっている。この形は三角関数の合成を使う典型パターンなので、これを選ぶ。($\sin \theta$, $\cos \theta$ は正とは限らず、積も一定にならないので相加相乗は使えない。)

合成公式 $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$ ($\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$) を用いる。

$$a = 3, b = 4 \text{ なので } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$g(\theta) = 5 \sin(\theta + \alpha) \quad (\cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ となる } \alpha)$$

$\sin(\theta + \alpha)$ の最大値は 1 なので、 $g(\theta)$ の最大値は $5 \times 1 = 5$ 。(α は $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ がともに正なので第 1 象限の角であり、 $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ を満たす $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に存在する。)

このように、同じ「最大値・最小値を求めよ」という問いでも、式の形(正の項の積が一定か、 $\sin$ と $\cos$ が混ざっているか)を見た瞬間にどちらの武器を使うかを判断で

きることが、高2の総復習で身につけたい力である。

(a) 最小値6 ($x = 3$ のとき)。 (b) 最大値5。 (a)は正の項の積が一定なので相加相乗、(b)は $\sin$ と $\cos$ の1次式なので合成を使う。

記2 円 $x^2 + y^2 = 16$ 上の点を $P(4 \cos \theta, 4 \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とし、円周上の定点を $Q(4, 0)$ とする。三角形 OPQ (O は原点) の面積を θ の式で表し、面積が最大になる θ の値とそのときの面積を求めよ。さらに、円の半径が一般の r であるときの面積の最大値を、 r を用いた式で表せ。

三角形 OPQ の面積を求める。 $O(0, 0)$ 、 $Q(4, 0)$ はどちらも $y = 0$ 上にあるので、線分 OQ を底辺とみることができる。底辺の長さは $OQ = 4$ 。

高さは、点 $P(4 \cos \theta, 4 \sin \theta)$ から底辺 (x 軸) までの距離、すなわち P の y 座標の絶対値である。

$$\text{高さ} = |4 \sin \theta|$$

したがって、三角形の面積 $S(\theta)$ は

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times 4 \times |4 \sin \theta| = 8 |\sin \theta|$$

$|\sin \theta|$ の最大値は 1 なので、 $S(\theta)$ が最大になるのは $|\sin \theta| = 1$ のとき、すなわち $\theta = \frac{\pi}{2}$ または $\theta = \frac{3\pi}{2}$ のとき。このとき点 P は円の一番上または一番下にあり、直感的にも三角形が一番大きくなる位置だとわかる。

最大値は $S = 8 \times 1 = 8$ 。

次に、円の半径を一般の r にして考える。同じ議論を繰り返すと、 $O(0, 0)$ 、 $Q(r, 0)$ 、 $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ なので

$$\begin{aligned} \text{底辺 } OQ &= r, \text{ 高さ} = |r \sin \theta| \\ S(\theta) &= \frac{1}{2} \times r \times |r \sin \theta| = \frac{1}{2} r^2 |\sin \theta| \end{aligned}$$

最大値は $|\sin \theta| = 1$ のときの $\frac{1}{2} r^2$ 。実際に $r = 4$ を代入すると $\frac{1}{2} \times 4^2 = \frac{1}{2} \times 16 = 8$ となり、さきほど求めた値と一致する。

この問題では、三角関数の章で学んだ単位円の考え方から円周上の点を $P(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と表すことと、同じく三角関数の章で学んだ $|\sin \theta|$ の最大値が 1 であるという性質を組み合わせることで、三角形の面積という図形の問題を、 θ の関数の最大値を求めるという 1 変数の問題に置きかえて解いている。半径 r を文字のままにして最後まで計算することで、答えが「半径 4 のときにたまたま 8 になった」のではなく、「どんな半径でも面積の最大値は $\frac{1}{2} r^2$ になる」という、より一般的な性質であるこ

とまで確かめられる。

$S(\theta) = 8|\sin \theta|$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のとき最大値8。一般の半径 r では最大値は $\frac{1}{2}r^2$ 。

E X A M

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 14分／配点 20点

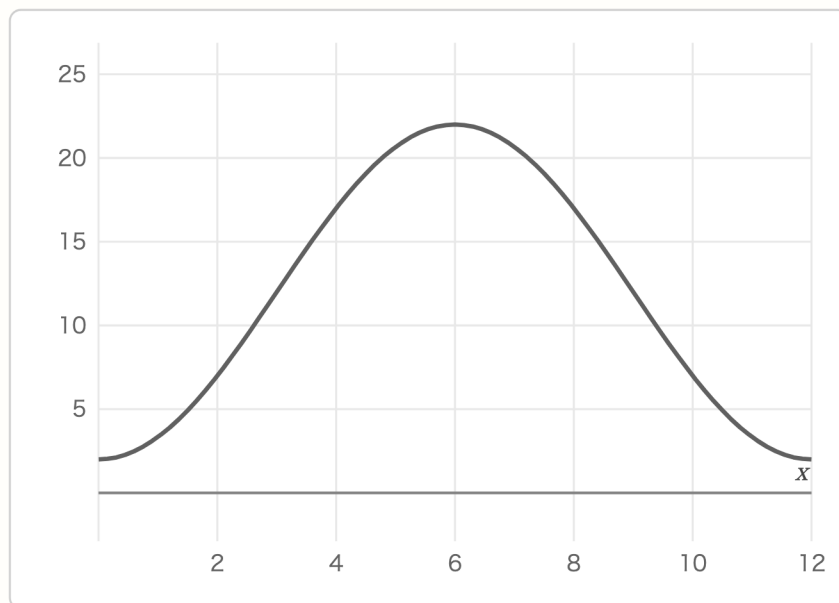
太郎さんと花子さんは、遊園地の観覧車の高さの変化について話している。この観覧車は半径10m、中心の高さは地上12m、1周するのにちょうど12分かかる。乗った位置が最も低い時刻を $t = 0$ （分）とすると、時刻 t 分での地上からの高さ $h(t)$ （m）は

$$h(t) = 12 - 10 \cos \frac{\pi}{6} t$$

と表せる。

花子「 $t = 0$ を代入すると、 $\cos 0 = 1$ だから $h(0) = 2$ 。たしかに一番低い位置の高さになるね。」

太郎「じゃあ、他の時刻でも高さを計算してみよう。」



時刻 t （分）と地上からの高さ $h(t)$ （m）の関係。12分でちょうど1周する。

(1) $t = 3$ のときの高さ $h(3)$ を求めると、 $h(3) = \boxed{\text{アイ}}$ mである。

$t = 3$ を代入する。

$$h(3) = 12 - 10 \cos \frac{\pi}{6} \times 3 = 12 - 10 \cos \frac{\pi}{2} = 12 - 10 \times 0 = 12$$

$$h(3) = 12\text{m}$$

(2)

花子「(1)で求めた $h(3) = 12$ はまだ17mに届いていないね。高さが17mを超えるのはいつからいつまでか調べてみよう。」高さが初めて17mになる時刻は $t =$ ウ (分) である。

ウ 4

(1)で求めた $h(3) = 12$ はまだ17mに届いていない。 $h(t) = 17$ とおく。

$$12 - 10 \cos \frac{\pi}{6} t = 17$$

$$-10 \cos \frac{\pi}{6} t = 5$$

$$\cos \frac{\pi}{6} t = -\frac{1}{2}$$

$0 \leq t < 12$ の範囲で $\frac{\pi}{6}t$ は0以上 2π 未満を動く。 $\cos$ の値が $-\frac{1}{2}$ になるのは $\frac{\pi}{6}t = \frac{2\pi}{3}$ または $\frac{4\pi}{3}$ のとき。

$$\frac{\pi}{6}t = \frac{2\pi}{3} \text{ より } t = 4, \quad \frac{\pi}{6}t = \frac{4\pi}{3} \text{ より } t = 8$$

初めて17mになるのは早い方の $t = 4$ 。これは(1)の $t = 3$ より後の時刻であり、 $h(3) = 12$ からさらに高さが上がっていく途中で17mに達したと矛盾しない。

$$t = 4 \text{ (分)}$$

(3)

太郎「今度は、高さが17m以上になっている時間帯そのものを求めてみよう。」
 $h(t) \geq 17$ となる t の範囲を求めると、高さが17m以上である時間は エ 分間である。

エ 4

(2)より $\cos \frac{\pi}{6}t \leq -\frac{1}{2}$ となる t の範囲は $\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}t \leq \frac{4\pi}{3}$ 、すなわち $4 \leq t \leq 8$ 。

この時間の長さは $8 - 4 = 4$ (分)。

4分間

大問2 目標時間 14分/配点 20点

1辺の長さが12cmの正方形の厚紙がある。この四隅から1辺 x cmの正方形を切り取り、残りを折り曲げてふたのない直方体の容器を作る ($0 < x < 6$)。容器の底面は1辺 $12 - 2x$ cmの正方形、高さは x cmになる。

- (1) 容器の体積を $V(x) = x(12 - 2x)^2$ とする。これを展開して整理すると $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ となる。 $V'(x)$ を求めて因数分解すると

$$V'(x) = 12(x - \boxed{\text{ア}})(x - \boxed{\text{イ}})$$

となる (ア<イとする)。ア、イの値を求めよ。

ア 2 イ 6

$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$ を x で微分する。

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$$

共通因数12でくくると

$$V'(x) = 12(x^2 - 8x + 12)$$

$x^2 - 8x + 12$ を因数分解する。積が12・和が-8になる2数は-2と-6なので

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$$

$$V'(x) = 12(x - 2)(x - 6)$$

- (2) $0 < x < 6$ の範囲で $V(x)$ の増減を調べると、体積が最大になるのは $x = \boxed{\text{ウ}}$ のときで、そのときの体積は $V(x) = \boxed{\text{エオカ}} \text{ cm}^3$ である。

ウ 2 エオカ 128

(1)より $V'(x) = 12(x - 2)(x - 6)$ 。 $0 < x < 6$ の範囲にある $V'(x) = 0$ の解は $x = 2$ のみ ($x = 6$ は範囲の端で対象外)。

増減を調べる。 $x < 2$ (例えば $x = 1$) で $V'(1) = 12 \times (-1) \times (-5) = 60 > 0$ (増加)、 $2 < x < 6$ (例えば $x = 3$) で $V'(3) = 12 \times 1 \times (-3) = -36 < 0$ (減少)。よって $x = 2$ で極大かつ最大。

$$V(2) = 4 \times 2^3 - 48 \times 2^2 + 144 \times 2 = 32 - 192 + 288 = 128$$

$x = 2$ のとき最大値 128 cm^3

- (3) 実際に切り取る大きさを、(2)で体積が最大になるとわかった $x = 2 \text{ cm}$ に決めたとき、使用する厚紙の面積 (底面積+4つの側面積の合計。切り取って捨てる4隅の正方形は含まない) を求めよ。使用面積は キクケ cm^2 である。

キクケ 128

底面積は $(12 - 2x)^2$ 、側面積は4枚分で $4 \times x \times (12 - 2x)$ 。

(2)で求めた、体積が最大になる $x = 2$ を代入する。

$$\text{底面積} = (12 - 4)^2 = 8^2 = 64$$

$$\text{側面積} = 4 \times 2 \times 8 = 64$$

$$\text{使用面積} = 64 + 64 = 128$$

128 cm^2

大問3 目標時間 14分/配点 20点

太郎さんは、元金100万円を年利10% (1.1倍) の複利で運用する計画を立てている。 n 年後の元利合計を a_n (万円) とすると、 $a_n = 100 \times 1.1^n$ である。

花子「これって、公比1.1の等比数列と同じ形だね。」

太郎「そうだね。まずは最初の数年でどう増えるか計算してみよう。」

(1)

a_1 、 a_2 の値をそれぞれ求めよ。 $a_1 = \boxed{\text{アイウ}}$ 万円、 $a_2 = \boxed{\text{エオカ}}$ 万円である。

アイウ 110 エオカ 121

$a_n = 100 \times 1.1^n$ に $n = 1, 2$ を代入する。

$$a_1 = 100 \times 1.1 = 110$$

$$a_2 = 100 \times 1.1^2 = 100 \times 1.21 = 121$$

($a_2 = a_1 \times 1.1 = 110 \times 1.1 = 121$ としても求められ、公比1.1の等比数列であることが確かめられる。)

$$a_1 = 110\text{万円}, a_2 = 121\text{万円}$$

(2)

花子「(1)で求めた $a_1 = 110$ 、 $a_2 = 121$ を見ると、たしかに毎年1.1倍になっているね。」太郎「じゃあこの先も $a_n = 100 \times 1.1^n$ という式でずっと計算できそうだ。元利合計が200万円を超えるのは何年後だろう。」 $\log_{10} 1.1 = 0.0414$ 、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ として、元利合計が初めて200万円を超えるのは $\boxed{\text{キ}}$ 年後である。

キ 8

(1)で求めた $a_1 = 110$ 、 $a_2 = 121$ は、たしかに $a_n = 100 \times 1.1^n$ に $n = 1, 2$ を代入した値と一致している ($100 \times 1.1 = 110$ 、 $100 \times 1.1^2 = 121$)。この式がすべての n で成り立つとして、条件を考える。

条件は $100 \times 1.1^n > 200$ 、すなわち $1.1^n > 2$ 。

両辺の常用対数をとる。

$$n \log_{10} 1.1 > \log_{10} 2$$

$$0.0414 n > 0.3010$$

$$n > \frac{0.3010}{0.0414} = 7.27 \dots$$

n は自然数なので、これを満たす最小の n は $n = 8$ 。

8年後

(3)

(2)より8年後に初めて200万円を超えることがわかった。では、その1年前の7年後の元利合計 a_7 はまだ200万円に届いていないことを実際に計算して確かめよう。(1)で求めた $a_1 = 110$ 、 $a_2 = 121$ から公比1.1倍を繰り返して、 a_7 の値を、小数第1位を四捨五入した整数で求めよ。 $a_7 = \boxed{\text{クケコ}}$ 万円である。

クケコ 195

(1)で求めた $a_1 = 110$ 、 $a_2 = 121$ から、公比1.1倍を繰り返して a_7 まで計算する。

$$a_3 = a_2 \times 1.1 = 121 \times 1.1 = 133.1$$

$$a_4 = a_3 \times 1.1 = 133.1 \times 1.1 = 146.41$$

$$a_5 = a_4 \times 1.1 = 146.41 \times 1.1 = 161.051$$

$$a_6 = a_5 \times 1.1 = 161.051 \times 1.1 = 177.1561$$

$$a_7 = a_6 \times 1.1 = 177.1561 \times 1.1 = 194.87171$$

小数第1位を四捨五入すると $a_7 \approx 195$ (万円)。たしかに200未満であり、(2)で求めた「8年後に初めて200万円を超える」という結果と矛盾しない。

$$a_7 \approx 195 \text{万円}$$

大問4 目標時間 14分/配点 20点

ある高校で、生徒196人を無作為に選んでアンケートをとったところ、98人が「朝食を毎日食べる」と回答した。

花子「この学校全体では、朝食を毎日食べる生徒の割合はどれくらいだろう。」

太郎「標本から母集団の比率を推定してみよう。」

(1)

標本比率 $\hat{p}$ を、これ以上約分できない分数 $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ の形で求めよ。

ア 1 イ 2

標本比率 $\hat{p} = \frac{\text{朝食を毎日食べると回答した人数}}{\text{標本の大きさ}}$ を使う。

$$\hat{p} = \frac{98}{196} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{p} = \frac{1}{2}$$

(2)

母比率 p に対する信頼度95%の信頼区間を、公式 $\hat{p} \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ を用いて求めよ。 $0.\boxed{\text{ウエ}} \leq p \leq 0.\boxed{\text{オカ}}$ の形で答えよ。

ウエ 43 オカ 57

$\hat{p} = 0.5, n = 196$ を代入する。

$$\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{196}} = \sqrt{\frac{0.25}{196}} = \frac{0.5}{14} = \frac{1}{28}$$

$$1.96 \times \frac{1}{28} = \frac{1.96}{28} = 0.07$$

$$0.5 - 0.07 = 0.43, 0.5 + 0.07 = 0.57$$

$$0.43 \leq p \leq 0.57$$

(3)

花子「(2)で求めた信頼区間の幅は $0.57 - 0.43 = 0.14$ だった。もっと精度を上げて、この幅を0.1以下にしたい。」太郎「標本比率は(1)と同じ $\hat{p} = \frac{1}{2}$ のまままだとして、必要な標本の大きさ n を計算してみよう。」信頼区間の幅 $2 \times 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ が0.1以下になるために必要な n の最小値は $n = \boxed{\text{キクケ}}$ である。

キクケ 385

(1)の $\hat{p} = \frac{1}{2}$ を使う。信頼区間の幅は $2 \times 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ なので、条件は

$$2 \times 1.96\sqrt{\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{n}} \leq 0.1$$

$\hat{p}(1-\hat{p}) = \frac{1}{4}$ を代入し、係数を整理する。

$$3.92\sqrt{\frac{0.25}{n}} \leq 0.1$$

$$\sqrt{\frac{0.25}{n}} \leq \frac{0.1}{3.92} = \frac{1}{39.2}$$

両辺を2乗する。

$$\frac{0.25}{n} \leq \frac{1}{1536.64}$$

$$n \geq 0.25 \times 1536.64 = 384.16$$

n は自然数（標本の大きさ）なので、これを満たす最小の n は $n = 385$ 。(2)より小さい標本（ $n = 196$ ）では幅が0.14だったのに対し、幅を0.1以下にするには標本をおよそ2倍にする必要があることがわかる。

$$n = 385$$

大問5 目標時間 14分／配点 20点

花子さんと太郎さんは、高次方程式と図形を組み合わせた問題に取り組んでいる。

3次方程式 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ について考える。

太郎「まずは因数定理で、代入して0になる値を探そう。」

花子「定数項6の約数を順番に試してみよう。」

(1)

この3次方程式をすべて解くと、 $x = \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}}$ （ $\text{ア} < \text{イ} < \text{ウ}$ とする。アは符号もつけて入力）である。

ア -2 イ 1 ウ 3

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ とおく。定数項6の約数を試すと

$$P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

なので $x = 1$ が解。因数定理より $P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ。

割り算すると $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$ （筆算・検算で確認できる）。

$$x = -2, 1, 3$$

(2)

(1)で求めた解のうち、最大のものを α 、最小のものを β とする ($\alpha = 3, \beta = -2$)。2点A($\alpha, 0$)、B(0, β)を通る直線の傾きは $\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ 、 y 切片は カ である (カは符号もつけて入力)。

エ 2 オ 3 カ -2

A(3, 0)、B(0, -2)を通る直線の傾きは

$$\frac{-2 - 0}{0 - 3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

y 切片は、 $x = 0$ のときの y 座標そのものなので-2 (点Bがそのまま y 切片)。

傾き $\frac{2}{3}$ 、 y 切片-2 (直線 $y = \frac{2}{3}x - 2$ 、すなわち $2x - 3y - 6 = 0$)

(3)

原点Oから、(2)で求めた直線までの距離を求めよ。距離は $\frac{\text{キ}\sqrt{\text{クケ}}}{\text{コサ}}$ である。

キ 6 クケ 13 コサ 13

(2)の直線を $2x - 3y - 6 = 0$ の形にしておく。点と直線の距離の公式

$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ を、この直線 ($a = 2, b = -3, c = -6$) と点O(0, 0)に使う。

$$\text{距離} = \frac{|2 \times 0 - 3 \times 0 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{距離は} \frac{6\sqrt{13}}{13}$$