

# 数I・A まとめテスト

解答（全62問）

氏名 \_\_\_\_\_

得点 \_\_\_\_\_ / 62点

DRILL

## まとめテスト（標準）

### 基本（1～25）

1

数と式：展開

$(x + 9)(x - 4)$  を展開せよ。

$x^2$  の係数 1     $x$  の係数 5    定数項 -36

4つの積を作る： $x \times x = x^2$ 、 $x \times (-4) = -4x$ 、 $9 \times x = 9x$ 、 $9 \times (-4) = -36$   
 $x$ の項をまとめる： $-4x + 9x = 5x$

$$(x + 9)(x - 4) = x^2 + 5x - 36$$

2

数と式：因数分解

$x^2 - 2x - 24$  を因数分解せよ。アには小さい方の数を入れよ。

$$(x + \text{ア } \underline{-6})(x + \text{イ } \underline{4})$$

和が $-2$ 、積が $-24$ になる2数を探す。 $-6 + 4 = -2$ 、 $-6 \times 4 = -24$ なので $-6$ と $4$ 。

$$x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4)$$

3

数と式：絶対値方程式

$|2x - 3| = 7$  を解け。

$$x = \underline{5, -2}$$

$|2x - 3| = 7$ より $2x - 3 = 7$ または $2x - 3 = -7$ 。

$2x - 3 = 7$ のとき $2x = 10$ 、 $x = 5$ 。

$2x - 3 = -7$ のとき $2x = -4$ 、 $x = -2$ 。

$$x = 5, -2$$

4

集合と命題：要素の個数

$n(A) = 20$ ,  $n(B) = 13$ ,  $n(A \cap B) = 5$  のとき、 $n(A \cup B)$  を求めよ。

$$n(A \cup B) = \underline{28}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 13 - 5 = 28$$

$$n(A \cup B) = 28$$

要素が6個の集合の部分集合は何個あるか求めよ。

答え **64** 個

まず小さい例で確かめよう。要素が2個の集合 $\{a, b\}$ の部分集合をすべて書き出すと、 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ の4個になる（空集合と自分自身も部分集合に数える）。

これを「要素ごとに入れるか入れないか」という選び方で数えなおしてみる。 $a$ を「入れる・入れない」の2通り、 $b$ も「入れる・入れない」の2通りで、この2つは独立に選べるので積の法則より $2 \times 2 = 4$ 通り。たしかに書き出した4個と一致する。

この「要素1個につき2通り」という数え方は、要素の個数が増えても同じように使える。要素が6個なら、6個それぞれに「入れる・入れない」の2通りがあるので、部分集合の個数は

$$2^6 = 64 \text{ 個}$$

要素が少ないうちは全部書き出して数えられるが、6個にもなると書き出すのは大変なので、この $2^n$ の公式が役に立つ。

**64個**

条件 $p$ ：「 $x = 4$ 」、条件 $q$ ：「 $x^2 = 16$ 」とする。 $p$ は $q$ であるための何条件か答えよ。

答え **(十分条件)** / 必要条件 / 必要十分条件 / どちらでもない

$p \Rightarrow q$ ： $x = 4$ ならば $x^2 = 16$ は成り立つ（真）。

$q \Rightarrow p$ ： $x^2 = 16$ ならば $x = 4$ とは限らない（ $x = -4$ という反例がある）ので偽。

$p \Rightarrow q$ だけが真なので、 $p$ は $q$ であるための十分条件（必要条件ではない）。

**十分条件**

7

2次関数：平方完成

$y = x^2 - 12x + 40$  を平方完成し、頂点の座標を求めよ。

頂点のx座標 6    頂点のy座標 4

$x$ の係数 $-12$ の半分は $-6$ 、2乗すると36。

$$y = x^2 - 12x + 36 - 36 + 40 = (x - 6)^2 + 4$$

頂点(6, 4)

8

2次関数：2次方程式

$x^2 - 7x + 12 = 0$  を解け。

$x =$  3,4

積が12、和が $-7$ になる2数は $-3$ と $-4$ 。

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

$$x = 3, 4$$

9

2次関数：2次不等式

$x^2 - 16 > 0$  を解け。

$\text{ア} < x < \text{イ}$  の形ではなく「 $x < \text{ア}$  または  $\text{イ} < x$ 」の形で、 $\text{ア} =$  -4     $\text{イ} =$  4

$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$ 。交点は $x = -4, 4$ 。 $y > 0$ なので外側型。

$$x < -4 \text{ または } 4 < x$$

10

図形と計量：三角比の定義

直角三角形で、隣辺8・対辺15・斜辺17のとき、 $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{15/17} \quad \cos \theta = \underline{8/17} \quad \tan \theta = \underline{15/8}$$

$\theta$ から見て、隣辺8・対辺15・斜辺17。定義にそのまま当てはめる。

$$\sin \theta = \frac{15}{17}, \cos \theta = \frac{8}{17}, \tan \theta = \frac{15}{8}$$

$$\sin \theta = \frac{15}{17}, \cos \theta = \frac{8}{17}, \tan \theta = \frac{15}{8}$$

11

図形と計量：三角比の相互関係

$\theta$ は鋭角で $\cos \theta = \frac{5}{13}$ のとき、 $\sin \theta$ ,  $\tan \theta$  を求めよ。

$$\sin \theta = \underline{12/13} \quad \tan \theta = \underline{12/5}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より $\sin^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$ 。 $\theta$ は鋭角なので $\sin \theta > 0$ 、よって $\sin \theta = \frac{12}{13}$ 。

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{12/13}{5/13} = \frac{12}{5}$$

$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{12}{5}$$

12

図形と計量：正弦定理

三角形ABCの外接円の半径が $R = 6$ 、辺 $a = 9$ のとき、 $\sin A$  の値を求めよ。

$$\sin A = \underline{3/4}$$

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ より $\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$$\sin A = \frac{3}{4}$$

13

データの分析：代表値

データ3, 5, 5, 8, 14の平均値と中央値を求めよ。

平均値 7    中央値 5

平均値： $(3 + 5 + 5 + 8 + 14) \div 5 = 35 \div 5 = 7$

中央値：すでに小さい順に並んでいるので、真ん中（3番目）の値5。

平均値7、中央値5

14

データの分析：四分位数

データ1, 4, 6, 9, 10, 13, 15, 18（すでに小さい順）の第1四分位数 $Q_1$ と第3四分位数 $Q_3$ を求めよ。

$Q_1 =$ 5     $Q_3 =$ 14

データ数8は偶数なので、そのまま半分に分ける。

下組：1, 4, 6, 9 → 中央値（ $Q_1$ ）は $(4 + 6) \div 2 = 5$

上組：10, 13, 15, 18 → 中央値（ $Q_3$ ）は $(13 + 15) \div 2 = 14$

$Q_1 = 5, Q_3 = 14$

15

データの分析：分散

データ2, 4, 6, 8, 10の分散 $V$ を求めよ。

$V =$ 8

平均は $(2 + 4 + 6 + 8 + 10) \div 5 = 6$ 。

偏差は-4, -2, 0, 2, 4、偏差の2乗は16, 4, 0, 4, 16、その和は40。

$V = 40 \div 5 = 8$

$V = 8$

16

場合の数と確率：積の法則

シャツが4種類、ズボンが3種類、靴が2種類ある。シャツ・ズボン・靴を1つずつ選んで組み合わせる方法は何通りあるか。

答え 24 通り

積の法則より  $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通り。

**24通り**

17

場合の数と確率：順列

5人から3人を選んで1列に並べる方法は何通りあるか。

答え 60 通り

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

**60通り**

18

場合の数と確率：組合せ

8人から3人を選ぶ方法は何通りあるか。

答え 56 通り

$${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

**56通り**

19

場合の数と確率：確率の基本

サイコロを1回投げるとき、偶数の目が出る確率を求めよ。

答え  $\frac{1}{2}$

偶数の目は2, 4, 6の3通り。全部で6通りなので確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

$$\frac{1}{2}$$

20

図形の性質：角の二等分線と比

三角形ABCで $AB = 8$ ,  $AC = 6$ とする。 $\angle A$ の二等分線と辺BCの交点を $D$ とするとき、 $BD : DC$ を求めよ。

$BD : DC =$  $4:3$

角の二等分線の性質より $BD : DC = AB : AC = 8 : 6 = 4 : 3$

$$BD : DC = 4 : 3$$

21

図形の性質：重心

三角形ABCの重心を $G$ とし、中線 $AM$ の長さが12であるとき、 $AG$ と $GM$ の長さを求めよ。

$AG =$  $8$      $GM =$  $4$

重心は中線を頂点側から2 : 1に内分する。 $AM = 12$ を2 : 1に分けると

$$AG = 12 \times \frac{2}{3} = 8, \quad GM = 12 \times \frac{1}{3} = 4$$

$$AG = 8, \quad GM = 4$$

22

図形の性質：円に内接する四角形

円に内接する四角形ABCDで、 $\angle A = 70^\circ$ のとき、 $\angle C$ を求めよ。

$$\angle C = \underline{110} \text{ 度}$$

円に内接する四角形は対角の和が $180^\circ$ になる。

$$\angle C = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\angle C = 110^\circ$$

23

整数の性質：約数の個数

36の正の約数の個数を求めよ。

$$\text{答え } \underline{9} \text{ 個}$$

$36 = 2^2 \times 3^2$ 。約数の個数は指数に1を足して掛け合わせる。

$$(2 + 1)(2 + 1) = 9$$

9個

24

整数の性質：最大公約数・最小公倍数

24と36の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

$$\text{最大公約数 } \underline{12} \quad \text{最小公倍数 } \underline{72}$$

$$24 = 2^3 \times 3, 36 = 2^2 \times 3^2$$

最大公約数：共通する素因数を低い方の指数で  $2^2 \times 3 = 12$

$$\text{最小公倍数：} 24 \times 36 \div 12 = 72$$

最大公約数12、最小公倍数72

25

整数の性質：n進法

2進法の $1011_{(2)}$ を10進法の数に変換せよ。

答え 11

位ごとに2のべき乗をかけて足す。

$$1011_{(2)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$$

11

## 標準 (26~50)

26

数と式：有理化

$\frac{1}{4 - \sqrt{11}}$ を有理化せよ。

( $\sqrt{\underline{11}} + \underline{4}$ ) /  $\underline{5}$

分母・分子に共役 $4 + \sqrt{11}$ をかける。

$$\frac{1}{4 - \sqrt{11}} = \frac{4 + \sqrt{11}}{(4 - \sqrt{11})(4 + \sqrt{11})} = \frac{4 + \sqrt{11}}{16 - 11} = \frac{4 + \sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{1}{4 - \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11} + 4}{5}$$

27

数と式：絶対値不等式

$|x - 5| \geq 9$ を解け。解は $x \leq \text{ア}$ または $x \geq \text{イ}$ の形になる。

ア = -4    イ = 14

$|x - 5| \geq 9$ は「点5からの距離が9以上」の範囲。

$x - 5 \geq 9$ より $x \geq 14$ 、または $x - 5 \leq -9$ より $x \leq -4$ 。

$x \leq -4$  または  $x \geq 14$

整数 $n$ について、「 $n^2$ が奇数ならば $n$ は奇数である」ことを、対偶を利用して証明せよ。

この命題の対偶は「 $n$ が偶数ならば $n^2$ は偶数である」。もとの命題と対偶は真偽が必ず一致するので、対偶を証明すればよい。

$n$ が偶数のとき、ある整数 $k$ を用いて $n = 2k$ とおける。

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$$

$2k^2$ は整数だから、 $n^2$ は「 $2 \times$ 整数」の形、すなわち偶数である。

したがって対偶「 $n$ が偶数ならば $n^2$ は偶数である」は真であり、対偶が真であればもとの命題も真である。

対偶「 $n$ が偶数ならば $n^2$ は偶数」を示すことで、もとの命題「 $n^2$ が奇数ならば $n$ は奇数」が証明された。

$x^2 + 8x + k = 0$  が実数解をもつような  $k$  の値の範囲を求めよ。

$$k \leq \underline{16}$$

実数解をもつ（重解も含む） $\iff D \geq 0$

$$D = 8^2 - 4 \times 1 \times k = 64 - 4k$$

$$64 - 4k \geq 0 \text{ より } 4k \leq 64、\text{ よって } k \leq 16$$

$$k \leq 16$$

30

2次関数：関数の決定（頂点形）

頂点が $(2, -3)$ で、点 $(4, 5)$ を通る放物線を $y = a(x - 2)^2 - 3$ の形で表すとき、 $a$ の値を求めよ。

$$a = \underline{2}$$

点 $(4, 5)$ を代入する。

$$5 = a(4 - 2)^2 - 3 = 4a - 3$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

$$a = 2 \text{ (式は } y = 2(x - 2)^2 - 3 \text{)}$$

31

図形と計量：三角方程式

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で $\sin \theta = \frac{1}{2}$ となる $\theta$ をすべて求めよ。

$$\theta = \underline{30, 150} \text{ 度}$$

$\sin \theta = \frac{1}{2}$ を満たす角は、鋭角では $30^\circ$ 。 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲では、 $\sin$ は $90^\circ$ を軸に対称な値をとるので、もう1つは $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ 。

$$\theta = 30^\circ, 150^\circ$$

三角形の3辺の長さが5, 6, 9のとき、最大辺9の対角 $\theta$ の余弦の値を求め、この三角形が鋭角三角形・直角三角形・鈍角三角形のどれになるか答えよ。

$$\cos \theta = \underline{-1/3} \quad \text{種類} \quad \underline{\text{鈍角}}$$

$$\text{余弦定理より} \cos \theta = \frac{5^2 + 6^2 - 9^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{25 + 36 - 81}{60} = \frac{-20}{60} = -\frac{1}{3}$$

$\cos \theta < 0$ なので $\theta$ は鈍角。最大辺の対角が鈍角であることから、この三角形は鈍角三角形である。

$$\cos \theta = -\frac{1}{3}, \text{鈍角三角形}$$

平均40、分散9のデータについて、全員の値を2倍したときの新しい平均・分散・標準偏差を求めよ。

$$\text{平均} \quad \underline{80} \quad \text{分散} \quad \underline{36} \quad \text{標準偏差} \quad \underline{6}$$

全員を $b$ 倍すると、平均も $b$ 倍、分散は $b^2$ 倍、標準偏差は $|b|$ 倍になる。 $b = 2$ なので

$$\text{平均} : 40 \times 2 = 80$$

$$\text{分散} : 9 \times 2^2 = 9 \times 4 = 36$$

$$\text{標準偏差} : \sqrt{36} = 6$$

平均80、分散36、標準偏差6

34

場合の数と確率：反復試行

コインを5回投げるとき、表がちょうど3回出る確率を求めよ。

答え 5/16

反復試行の公式より、5回中3回表が出る確率は

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{5}{16}$$

35

場合の数と確率：条件付き確率

袋に赤玉3個・白玉5個が入っている。玉を1個ずつ、もとに戻さずに2個続けて取り出す。1個目が赤玉であったとき、2個目も赤玉である条件付き確率を求めよ。

答え 2/7

1個目に赤玉を取り出した後、袋の中は赤玉2個・白玉5個の合計7個になっている。

この状態から2個目に赤玉を取り出す確率は $\frac{2}{7}$ 。

$$\frac{2}{7}$$

三角形ABCの辺BC,CA,AB上（またはその延長）に点D,E,Fをとり、線分AD,BE,CFが1点で交わっている。 $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{CE}{EA} = \frac{4}{5}$ のとき、 $\frac{AF}{FB}$ を求めよ。

$$\frac{AF}{FB} = \underline{\underline{15/8}}$$

$$\text{チェバの定理より } \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{8}{15} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{15}{8}$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{15}{8}$$

円の外部の点Pから2本の割線を引く。1本目は円との交点までの距離が近い方4、遠い方9（ $PA = 4$ ,  $PB = 9$ ）である。2本目は近い方の交点までの距離が3（ $PC = 3$ ）である。2本目の遠い方の交点までの距離PDを求めよ。

$$PD = \underline{\underline{12}}$$

$$\text{方べきの定理より } PA \times PB = PC \times PD$$

$$4 \times 9 = 3 \times PD$$

$$36 = 3 \times PD$$

$$PD = 12$$

$$PD = 12$$

ユークリッドの互除法を用いて、84と126の最大公約数を求めよ。

答え 42

大きい方を小さい方で割った余りを使って、割る数を更新していく。

$$126 = 84 \times 1 + 42$$

$$84 = 42 \times 2 + 0$$

余りが0になったときの割る数が最大公約数。

**最大公約数42**

$3x + 7y = 1$ の整数解のうち、 $0 \leq x \leq 6$ を満たすものを求めよ。

$x =$ 5 $\quad y =$ -2 $\quad (\text{符号もつけて入力})$

$7y = 1 - 3x$ より、 $1 - 3x$ が7の倍数になる $x$ を、0から順に代入して探す。

$$x = 0 : 1 - 0 = 1 \quad (7\text{の倍数でない})$$

$$x = 1 : 1 - 3 = -2 \quad (7\text{の倍数でない})$$

$$x = 2 : 1 - 6 = -5 \quad (7\text{の倍数でない})$$

$$x = 3 : 1 - 9 = -8 \quad (7\text{の倍数でない})$$

$$x = 4 : 1 - 12 = -11 \quad (7\text{の倍数でない})$$

$$x = 5 : 1 - 15 = -14 = 7 \times (-2) \quad (7\text{の倍数になった})$$

$$\text{よって } x = 5 \text{ のとき } y = \frac{-14}{7} = -2。$$

$$\text{検算 : } 3 \times 5 + 7 \times (-2) = 15 - 14 = 1 \quad (\text{成り立つ})$$

$$x = 5, y = -2$$

1以上40以下の自然数の集合を $U$ とする。 $A$ を3の倍数の集合、 $B$ を4の倍数の集合とすると、 $n(A \cup B)$ を求めよ。

$$n(A \cup B) = \underline{20}$$

$$n(A) = 13 \text{ (3の倍数、} \lfloor 40 \div 3 \rfloor \text{)}, n(B) = 10 \text{ (4の倍数、} 40 \div 4 \text{)}, n(A \cap B) = 3 \text{ (12の倍数、} \lfloor 40 \div 12 \rfloor \text{)}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 13 + 10 - 3 = 20$$

$$n(A \cup B) = 20$$

三角形ABCは円に内接し、その外接円の直径が $AC$ である（すなわち $AC$ が直径）。 $AB = 6$ ,  $BC = 8$ のとき、外接円の半径 $R$ を正弦定理を用いて求めよ。

$$R = \underline{5}$$

円周角の定理より、直径に対する円周角はつねに $90^\circ$ なので $\angle B = 90^\circ$ 。

よって三平方の定理から $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ 。

$$\text{正弦定理} \frac{AC}{\sin B} = 2R \text{ より } 2R = \frac{10}{\sin 90^\circ} = \frac{10}{1} = 10、\text{よって} R = 5。$$

$$R = 5$$

2次方程式 $x^2 - mx + 36 = 0$ が異なる2つの正の整数の解をもつとき、 $m$ の値のうち最大のものを求めよ。

$m = \underline{37}$

2つの解を $\alpha, \beta$  ( $\alpha \neq \beta$ ) とすると $x^2 - mx + 36 = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ 。展開して係数を比べると $\alpha\beta = 36$ ,  $\alpha + \beta = m$  (数Iの展開・係数比較)。

つまり、積が36になる異なる正の整数の組をすべて洗い出し、その和の最大値を求めればよい (整数の性質：約数を数え上げる技術)。

(1, 36) : 和37、(2, 18) : 和20、(3, 12) : 和15、(4, 9) : 和13、(6, 6) : 異なる2数でないため除く。

和が最大になるのは(1, 36)のときの37。

$m = 37$  (そのとき解は $x = 1, 36$ )

サイコロを1回投げるときの出た目の期待値を求めよ。

答え  $\underline{3.5}$

期待値は「値×確率」をすべて足したもの。目はどれも確率 $\frac{1}{6}$ で出るので

$$E = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3.5$$

これは1から6までの平均値の計算とまったく同じである。

期待値 = 3.5

$n^2 - 1$ が素数になるような、2以上の自然数 $n$ をすべて求めよ。

$$n = \underline{2}$$

因数分解すると $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$ 。

$n \geq 2$ のとき $n + 1 \geq 3$ なので、 $(n - 1)(n + 1)$ が素数になるには、もう一方の因数 $(n - 1)$ が1でなければならない（2つの整数の積が素数になるのは、一方が1、もう一方がその素数自身のときだけ）。

$n - 1 = 1$ より $n = 2$ 。このとき $n^2 - 1 = 3$ （素数）。

$n \geq 3$ のとき $n - 1 \geq 2$ なので $(n - 1)(n + 1)$ は2以上の2つの整数の積となり合成数になってしまう。

$$n = 2$$

整数 $n$ について、「 $n$ が6の倍数である」ことは、「 $n$ が2の倍数かつ3の倍数である」ための何条件か答えよ。

答え （十分条件 / 必要条件 / **必要十分条件** / どちらもでない）

$n$ が6の倍数 $\Rightarrow n$ は2の倍数かつ3の倍数： $6 = 2 \times 3$ なので明らかに成り立つ。真。

$n$ が2の倍数かつ3の倍数 $\Rightarrow n$ は6の倍数：2と3は互いに素（最大公約数が1）なので、両方の倍数であればその最小公倍数6の倍数になる。真。

両方向とも真なので、必要十分条件である。

**必要十分条件**

40人にアンケートをとったところ、「数学が好き」と答えた生徒は23人、「英語が好き」と答えた生徒は18人、両方好きと答えた生徒は11人だった。この40人から1人を無作為に選ぶとき、その生徒が「数学も英語もどちらも好きでない」確率を求めよ。

答え  $\frac{1}{4}$

「数学好き」または「英語好き」の人数は

$$n(A \cup B) = 23 + 18 - 11 = 30$$

ド・モルガンの法則より、「数学も英語も好きでない」という集合は $A \cup B$ の補集合 $\overline{A \cup B}$ と一致する。

補集合の要素の個数は、全体の人数から $n(A \cup B)$ を引いた $n(U) - n(A \cup B)$ で求められるので

$$40 - 30 = 10 \text{ (人)}$$

1人を無作為に選ぶときの確率は

$$\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

47

場合の数と確率×図形の性質：円周上の点と組合せ

円周上に8個の点があり、これらを順に結んで八角形を作る。(1)この8点から3点を選んでできる三角形は何個あるか、(2)この八角形の対角線は何本引けるか、それぞれ求めよ。

三角形 56 個 対角線 20 本

(1) 円周上のどの3点も一直線上にないので、3点を選べば必ず1つの三角形ができる。

$${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \text{個}$$

(2) まず8点から2点を選ぶ方法は ${}_8C_2 = 28$ 通り。このうち、隣り合う2点を結ぶ8本は対角線ではなく八角形の辺なので除く。

$$28 - 8 = 20 \text{本}$$

**三角形56個、対角線20本**

48

データの分析：分散の比較

データAの標準偏差は6、データBの標準偏差は9である。それぞれの分散を求め、どちらの散らばりが大きいのか答えよ。

分散A 36 分散B 81 散らばりが大きい方 B

分散は標準偏差の2乗。

$$\text{分散A} = 6^2 = 36, \text{分散B} = 9^2 = 81$$

分散が大きいほど散らばりが大きいので、Bの方が散らばりが大きい。

**分散A= 36、分散B= 81、散らばりが大きいのはB**

命題「 $x > 3$ ならば $x > 1$ 」の逆と裏の真偽を、それぞれ「真」または「偽」で答えよ。

逆 (真 / **偽**)    裏 (真 / **偽**)

逆「 $x > 1$ ならば $x > 3$ 」： $x = 2$ は $x > 1$ を満たすが $x > 3$ を満たさない（反例）。  
偽。

裏「 $x \leq 3$ ならば $x \leq 1$ 」： $x = 2$ は $x \leq 3$ を満たすが $x \leq 1$ を満たさない（反例）。  
偽。

（逆と裏はもとの命題に対して互いに対偶の関係にあるので、真偽は必ず一致する。  
もとの命題自体は真だが、逆・裏はどちらも偽になっている。）

**逆＝偽、裏＝偽**

$x^3 - x$  を因数分解せよ。アには小さい方の数を入れよ。

$x(x + \text{ア } \underline{-1})(x + \text{イ } \underline{1})$

まず共通因数 $x$ をくくり出す。

$$x^3 - x = x(x^2 - 1)$$

$x^2 - 1$ は2乗の差の公式で因数分解できる。

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$$

51

2次関数×図形と計量：面積の最大化

2辺の長さの和が12、その間の角が $120^\circ$ の三角形がある。一方の辺の長さを $x$  ( $0 < x < 12$ ) として、面積 $S$ が最大になる $x$ の値と、そのときの最大値を求めよ。

$$x = \underline{6} \quad \text{最大値 } S = \underline{9\sqrt{3}}$$

もう一方の辺は $12 - x$ 。面積公式より

$$S = \frac{1}{2}x(12 - x) \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(12x - x^2)$$

$x^2$ の項に注目して平方完成する。 $12x - x^2 = -(x^2 - 12x) = -((x - 6)^2 - 36) = -(x - 6)^2 + 36$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(-(x - 6)^2 + 36) = -\frac{\sqrt{3}}{4}(x - 6)^2 + 9\sqrt{3}$$

上に凸なので、 $x = 6$  (区間 $0 < x < 12$ の中にある) で最大値 $9\sqrt{3}$ 。

$$x = 6 \text{ のとき最大値 } S = 9\sqrt{3}$$

円に内接する四角形ABCDで、 $AB = 4$ ,  $BC = 5$ ,  $CD = 6$ ,  $DA = 7$ 、 $\angle ABC = \theta$ とする。対角線ACについて、三角形ABCと三角形ACDでそれぞれ余弦定理を立式することにより、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\underline{-11/31}}$$

円に内接する四角形は対角の和が $180^\circ$ なので $\angle ADC = 180^\circ - \theta$ 。

三角形ABCで余弦定理：

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos \theta = 16 + 25 - 40 \cos \theta = 41 - 40 \cos \theta$$

三角形ACDで余弦定理 ( $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ を使う)：

$$AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2 \cdot CD \cdot DA \cos(180^\circ - \theta) = 36 + 49 + 84 \cos \theta = 85 + 84 \cos \theta$$

同じ $AC^2$ なので2式を等しいとおく。

$$41 - 40 \cos \theta = 85 + 84 \cos \theta$$

$$41 - 85 = 84 \cos \theta + 40 \cos \theta$$

$$-44 = 124 \cos \theta$$

$$\cos \theta = -\frac{44}{124} = -\frac{11}{31}$$

$$\cos \theta = -\frac{11}{31}$$

$x > y > 0$ を満たす自然数 $x, y$ が、 $x^2 - y^2 = 45$ を満たすとき、 $(x, y)$ の組は何個あるか。また、そのうち $x$ が最小になる組を求めよ。

個数 3    最小の  $x =$  7    そのときの  $y =$  2

因数分解すると $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 45$ 。

$x - y$ と $x + y$ はどちらも自然数で、その積が45（奇数）になるので、どちらも奇数である（奇数どうしの積でないと45にならない）。さらに $x - y < x + y$ なので、45を「小さい方×大きい方」の奇数の積に分解する。

$$45 = 1 \times 45 = 3 \times 15 = 5 \times 9$$

それぞれから $x = \frac{(x - y) + (x + y)}{2}$ ,  $y = \frac{(x + y) - (x - y)}{2}$ を計算する。

$$1 \times 45 : x = 23, y = 22$$

$$3 \times 15 : x = 9, y = 6$$

$$5 \times 9 : x = 7, y = 2$$

組は3個。 $x$ が最小になるのは $x = 7, y = 2$

正八角形の8個の頂点から3点を選んで三角形を作るとき、正八角形の辺を少なくとも1辺として含む三角形は何個できるか。

答え 40 個

「辺を2つ含む場合（連続する3頂点）」と「辺をちょうど1つ含む場合」に分けて数える。

辺を2つ含む場合：連続する3頂点を選ぶ組は、頂点の個数と同じ8個。

辺をちょうど1つ含む場合：まず辺を1つ選ぶ（8通り）。その辺の両端の頂点を  $v_i, v_{i+1}$  とすると、残りの頂点のうち、両隣の  $v_{i-1}$  と  $v_{i+2}$  を選ぶと辺が2つになってしまうのでこの2点は使えない。よって選べる第3の頂点は  $8 - 2 - 2 = 4$  個。

辺の選び方8通り×第3頂点4通り = 32個（この数え方では、1つの三角形が使う辺は1つだけなので重複はない）。

合計すると

$$8 + 32 = 40 \text{ 個}$$

**40個**

すべての実数 $x$ について $x^2 + 2ax + 3a + 4 \geq 0$ が成り立つように、定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

下端 = -1    上端 = 4

左辺を $y = x^2 + 2ax + (3a + 4)$ とみると $x^2$ の係数は $1 > 0$ （下に凸）。

下に凸の放物線がすべての $x$ で $y \geq 0$ になるのは、頂点の $y$ 座標が0以上、つまり判別式 $D \leq 0$ のとき（等号 $D = 0$ も、頂点でちょうど $y = 0$ になるだけで「 $\geq 0$ 」を満たすので含む）。

$$D = (2a)^2 - 4 \times 1 \times (3a + 4) = 4a^2 - 12a - 16$$

$D \leq 0$ より $4a^2 - 12a - 16 \leq 0$ 。両辺を4で割って $a^2 - 3a - 4 \leq 0$ 。積が $-4$ ・和が $-3$ になる2数は $-4$ と1なので $(a - 4)(a + 1) \leq 0$ 。

これは内側型なので $-1 \leq a \leq 4$ （等号を含む）。

$$-1 \leq a \leq 4$$

袋Aには赤玉3個・白玉2個、袋Bには赤玉2個・白玉4個が入っている。袋Aから1個、袋Bから1個を同時に取り出すとき、(1)2個とも赤玉である確率、(2)少なくとも1個が赤玉である確率を、それぞれ求めよ。

(1)2個とも赤玉  $\frac{1}{5}$     (2)少なくとも1個が赤玉  $\frac{11}{15}$

袋Aと袋Bからそれぞれ1個ずつ取り出す試行は、一方の結果がもう一方に影響しない独立な試行である。

(1) Aから赤玉を取り出す確率は $\frac{3}{5}$ 、Bから赤玉を取り出す確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。独立な試行の確率は掛け合わせればよいので

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

(2) 「少なくとも1個は赤玉」の余事象は「2個とも白玉」。Aで白玉の確率は $\frac{2}{5}$ 、Bで白玉の確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ なので、2個とも白玉の確率は

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

余事象の考え方より、少なくとも1個が赤玉である確率は

$$1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$$

$$(1) \frac{1}{5} \quad (2) \frac{11}{15}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、 $\sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2}$  を、 $\theta$  の範囲によって場合分けして簡単にせよ。

根号の中が2乗の形なので、 $\sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} = |\sin \theta - \cos \theta|$  (絶対値の定義： $\sqrt{A^2} = |A|$ )。

あとは中身  $\sin \theta - \cos \theta$  の符号を、 $\theta$  の範囲で場合分けして調べればよい。

$0^\circ \leq \theta < 45^\circ$  のとき：この範囲では  $\cos \theta > \sin \theta$  (たとえば  $\theta = 0^\circ$  なら  $\sin 0^\circ = 0$ ,  $\cos 0^\circ = 1$  で確かに  $\cos$  の方が大きい)。よって  $\sin \theta - \cos \theta < 0$  なので、絶対値を外すと符号が反転し

$$|\sin \theta - \cos \theta| = \cos \theta - \sin \theta$$

$45^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき：この範囲では  $\sin \theta \geq \cos \theta$  ( $\theta = 45^\circ$  で等しくなり、 $\theta = 180^\circ$  なら  $\sin 180^\circ = 0$ ,  $\cos 180^\circ = -1$  で確かに  $\sin$  の方が大きい)。よって  $\sin \theta - \cos \theta \geq 0$  なので、絶対値はそのまま外せて

$$|\sin \theta - \cos \theta| = \sin \theta - \cos \theta$$

$0^\circ \leq \theta < 45^\circ$  のとき  $\cos \theta - \sin \theta$ 、 $45^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $\sin \theta - \cos \theta$

「四角形ABCDにおいて $\angle A + \angle C = 180^\circ$ が成り立つならば、この四角形は円に内接する」ことが知られている（円に内接する四角形の定理の逆）。これを利用して、 $\angle A = (3x + 10)^\circ$ ,  $\angle C = (2x + 20)^\circ$ であるとき、四角形ABCDが円に内接するような $x$ の値を求めよ。

$$x = \underline{30}$$

円に内接する条件は $\angle A + \angle C = 180^\circ$ 。

$$(3x + 10) + (2x + 20) = 180$$

$$5x + 30 = 180$$

$$5x = 150$$

$$x = 30$$

（検算： $\angle A = 3 \times 30 + 10 = 100^\circ$ 、 $\angle C = 2 \times 30 + 20 = 80^\circ$ 、和は $180^\circ$ で確かに成り立つ。）

$$x = 30$$

3辺の長さが5, 6, 7の三角形の内接円の半径 $r$ を求めよ。面積と半周長の関係 $S = rs$  ( $s$ は半周長、 $S$ は面積) を利用せよ。

$$r = \underline{\underline{2\sqrt{6}/3}}$$

まず面積 $S$ を求めるために、辺5, 6にはさまれた角 $C$  (対辺7) を余弦定理で求める。

$$\cos C = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{25 + 36 - 49}{60} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad (0^\circ < C < 180^\circ \text{より} \sin C > 0)$$

面積公式より

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin C = 15 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}$$

半周長は $s = \frac{5 + 6 + 7}{2} = 9$ 。図形と計量 (数I) で学ぶ内接円の半径の公式 $S = rs$ より

$$r = \frac{S}{s} = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

自然数 $n$ について、組合せ ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ を考える。命題「 ${}_nC_2$ が3の倍数ならば、 $n$ は3の倍数、または $n-1$ は3の倍数である」の真偽をアで答えよ。また、この命題の逆「 $n$ は3の倍数、または $n-1$ は3の倍数であるならば、 ${}_nC_2$ は3の倍数である」の真偽をイで答えよ（「真」または「偽」で入力）。

ア = ( 真 ) / 偽      イ = ( 真 ) / 偽

まず、もとの命題（ア）を調べる。 ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ が3の倍数であるとする。3は素数であり、2と互いに素なので、3が $\frac{n(n-1)}{2}$ を割り切ることと、3が $n(n-1)$ を割り切るとは同値である。

3は素数なので、3が積 $n(n-1)$ を割り切るならば、3は $n$ または $n-1$ の少なくとも一方を割り切る（ $n$ が3の倍数、または $n-1$ が3の倍数）。よってアは真。

次に、逆（イ）を調べる。 $n$ が3の倍数、または $n-1$ が3の倍数であるとする。このとき $n(n-1)$ は必ず3の倍数になる（積の一方が3の倍数なので）。さらに $n(n-1)$ は連続する2整数の積なので必ず2の倍数でもある。3の倍数かつ2の倍数、つまり6の倍数（集合と命題の必要十分条件：45番参照）なので、 $n(n-1) = 6k$ （ $k$ は整数）と書け、 ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} = 3k$ となり3の倍数。よってイも真。

（実は、アとイがどちらも真ということは、「 ${}_nC_2$ が3の倍数」と「 $n$ が3の倍数、または $n-1$ が3の倍数」は必要十分条件になっている。具体例で確かめると、 $n=4$ のとき ${}_4C_2=6$ で3の倍数、 $n-1=3$ は確かに3の倍数。 $n=5$ のとき ${}_5C_2=10$ で3の倍数でなく、 $n=5$ ,  $n-1=4$ もどちらも3の倍数でない——たしかに一致している。）

**ア=真、イ=真（必要十分条件になっている）**

## E X A M

## 共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 14分/配点 20点

花子さんは文化祭の模擬店でポップコーンを1袋300円で売る計画を立てている。値引きをしなければ1日40袋売れる見込みである。値引きの回数を $x$ 回（ $x$ は0以上の整数）とし、1回の値引きにつき、価格が10円下がり、売れる袋数が2袋増えるとする。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「1袋あたりの価格と、売れる袋数を、まず $x$ を使った式で表してみよう。」

花子「はい。1袋あたりの価格は $(300 - 10x)$ 円、売れる袋数は $(40 + 2x)$ 袋になります。」

- (1) 1日の売上金額を $S$ 円とすると、 $S = (300 - 10x)(40 + 2x)$ である。これを展開して整理すると

$$S = -20x^2 + \boxed{\text{アイウ}}x + 12000$$

となる。さらに平方完成すると

$$S = -20(x - \boxed{\text{エ}})^2 + \boxed{\text{オカキクケ}}$$

となる。アイウ、エ、オカキクケの値を求めよ。

アイウ 200 エ 5 オカキクケ 12500

$S = (300 - 10x)(40 + 2x)$ を展開する。

$$S = 300 \times 40 + 300 \times 2x - 10x \times 40 - 10x \times 2x$$

$$= 12000 + 600x - 400x - 20x^2$$

$$= -20x^2 + 200x + 12000$$

よってアイウ=200。

次に平方完成する。 $x^2$ の係数 $-20$ をくくり出す。

$$S = -20(x^2 - 10x) + 12000$$

$$x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 25 \text{なので}$$

$$S = -20\{(x - 5)^2 - 25\} + 12000 = -20(x - 5)^2 + 500 + 12000 = -20(x - 5)^2 + 12500$$

よってエ=5、オカキクケ=12500。

$$S = -20x^2 + 200x + 12000 = -20(x - 5)^2 + 12500$$

(2)

先生「値引きの回数は、仕入れの都合で6回以上10回以下に制限されることになりました。」

(1)の結果を利用すると、この範囲で $S$ が最大になるのは $x = \boxed{\text{コ}}$ のときで、そのときの売上金額は $S = \boxed{\text{サシスセソ}}$ 円である。

コ 6 サシスセソ 12480

(1)で求めた $S = -20(x - 5)^2 + 12500$ を使う。頂点（軸）は $x = 5$ 。今回の範囲は $6 \leq x \leq 10$ で、軸 $x = 5$ はこの範囲より左側にある。

$x^2$ の係数が $-20 < 0$ （上に凸）なので、軸より右側では $S$ は単調に減少する。範囲 $6 \leq x \leq 10$ は丸ごと軸より右側にあるので、この範囲でも $S$ はずっと減少する。したがって最大値は範囲の左端 $x = 6$ でとる。

$$x = 6 \text{のとき } S = -20(6 - 5)^2 + 12500 = -20 + 12500 = 12480$$

$x = 6$ のとき最大値 $S = 12480$ 円

(3)

花子「値引きをしすぎると利益が減るので、売上金額が12320円を下回らないようにしたいです。」

(2)の値引き回数の制限（6回以上10回以下）の範囲で、 $S$ が12320円以上になる $x$ の範囲を求めると、 $\boxed{\text{タ}} \leq x \leq \boxed{\text{チ}}$ である。

タ 6 チ 8

(1)で求めた $S = -20(x - 5)^2 + 12500$ を使い、 $S \geq 12320$ を解く。

$$-20(x - 5)^2 + 12500 \geq 12320$$

$$-20(x - 5)^2 \geq -180$$

両辺を $-20$ で割ると、不等号の向きが変わることに注意して

$$(x - 5)^2 \leq 9$$

$$-3 \leq x - 5 \leq 3$$

$$2 \leq x \leq 8$$

これに(2)で示された値引き回数の制限  $6 \leq x \leq 10$  を合わせる。共通部分をとると  $6 \leq x \leq 8$

(検算:  $x = 6$  のとき  $S = 12480$  円、 $x = 8$  のとき  $S = -20(8 - 5)^2 + 12500 = -180 + 12500 = 12320$  円。ちょうど境界で12320円になる。)

$$6 \leq x \leq 8$$

大問2 目標時間 12分/配点 20点

花子さんのクラス36人に、教科の好みについてアンケートをとった。「数学が好き」と答えた生徒は20人、「英語が好き」と答えた生徒は15人、両方好きと答えた生徒は8人だった。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「どちらも好きでない生徒からも、何人か代表を選んでみよう。」

- (1) 「数学が好き」または「英語が好き」と答えた生徒の人数は アイ 人であり、どちらも好きでないと答えた生徒の人数は ウ 人である。アイ、ウの値を求めよ。

アイ 27 ウ 9

要素の個数の公式より

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 15 - 8 = 27 \text{ (人)}$$

全体36人からこれを引くと、どちらも好きでない人数は

$$36 - 27 = 9 \text{ (人)}$$

**27人、9人**

- (2) (1)で求めた「どちらも好きでない」9人の中から、代表を2人選ぶ方法は エオ 通りである。エオの値を求めよ。

9人から2人を選ぶ組合せなので

$${}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36 \text{ (通り)}$$

**36通り**

(3) 先生「係を3人にしよう。(2)で選んだ2人に、もう1人加えてみようか。」

(2)で選んだ「どちらも好きでない」生徒2人に、残りの1人を、(1)で求めた「数学か英語が好き」な27人の中から選んで加え、3人の係を作る。この選び方は

**カキク**通りである。カキクの値を求めよ。

カキク 972

(2)より、「どちらも好きでない」9人から2人を選ぶ方法は36通り。

残りの1人は、(1)で求めた「数学か英語が好き」な27人の中から選ぶので27通り。

2人を選ぶ操作と1人を選ぶ操作を続けて行うので、積の法則より

$$36 \times 27 = 972 \text{ (通り)}$$

**972通り**

大問3 目標時間 16分／配点 20点

太郎さんと花子さんは、公園にある三角形の池の周りに何かを作ろうと考えている。地点Cから2地点A,Bを見込む角度と距離を測量した結果、 $CA = 6\text{m}$ 、 $CB = 10\text{m}$ 、 $\angle ACB = 120^\circ$ であった。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

太郎「まずABの距離を求めれば、池の周りに設置するものの設計がしやすくなるね。」

花子「余弦定理を使えば、角と2辺の長さからABが求まるよ。」

- (1) 余弦定理を用いて、ABの距離を求めよ。 $AB = \boxed{\text{アイ}}$ mである。アイの値を求めよ。

アイ 14

余弦定理より

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cos 120^\circ = 36 + 100 - 2 \times 6 \times 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 136 + 60 = 196$$

$$AB > 0 \text{より} AB = \sqrt{196} = 14$$

$$AB = 14\text{m}$$

- (2) 太郎「せっかくだから、A,B,Cを囲むような円形の遊歩道を作りたいな。」花子「それなら3点A,B,Cを通る円、つまり三角形ABCの外接円を考えればいいね。」

正弦定理を用いて、この外接円の半径 $R$ を求めよ。 $R = \boxed{\text{ウエ}}\sqrt{3}/\boxed{\text{オ}}$  (m)の形になる。ウエ、オの値を求めよ。

ウエ 14 オ 3

$$\begin{aligned} \text{正弦定理} \frac{AB}{\sin C} &= 2R \text{より} \\ 2R &= \frac{14}{\sin 120^\circ} = \frac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{28}{\sqrt{3}} = \frac{28\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} R = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$R = \frac{14\sqrt{3}}{3}\text{m}$$

- (3) 太郎「この外接円をそのまま遊歩道にしまおう。」花子「じゃあ、(2)で求めた半径 $R$ を使えば、遊歩道の全長も計算できるね。」

円周率を $\pi$ として、(2)で求めた半径 $R$ を用いると、この円形の遊歩道の全長は $2\pi R = \boxed{\text{カキ}}\sqrt{3}\pi/\boxed{\text{ク}}$  (m)の形になる。また、(2)で求めた半径 $R$ の円周上に地点Cを含めて等間隔に6か所の休憩ベンチを設置するとき、この6か所から

3か所を選んで結んでできる三角形は ケコ 個である。カキ、ク、ケコの値を求めよ。

カキ 28    ク 3    ケコ 20

$$(2)より R = \frac{14\sqrt{3}}{3} \text{ なので、遊歩道の全長は}$$
$$2\pi R = 2\pi \times \frac{14\sqrt{3}}{3} = \frac{28\sqrt{3}}{3}\pi \text{ (m)}$$

6か所から3か所を選ぶ方法は組合せの考え方で

$${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ (個)}$$

$$\text{全長 } \frac{28\sqrt{3}}{3}\pi \text{ m、三角形 } 20 \text{ 個}$$

大問4 目標時間 14分／配点 20点

太郎さんのクラスでは、体育祭の抽選会を開くことにした。100本のくじのうち、1等（1000円分の商品券）が2本、2等（300円分の商品券）が18本、はずれ（0円）が80本ある。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「くじを1本引いたときにもらえる金額は、確率を使って『平均するといくらか』を計算できるよ。」

(1) くじを1本引くときにもらえる金額の期待値  $E$  を求めよ。  $E =$  アイ 円である。アイの値を求めよ。

アイ 74

期待値は「金額×確率」の合計。

$$E = 1000 \times \frac{2}{100} + 300 \times \frac{18}{100} + 0 \times \frac{80}{100} = 20 + 54 + 0 = 74 \text{ (円)}$$

$$E = 74 \text{ 円}$$

(2)

花子「(1)の期待値は74円もあるんだね。でも、はずればかり続けて引いてしまうこともあるのかな。」

太郎さんが続けてこのくじを2本引く（引いたくじはもとに戻さない）とき、2本ともはずれとなる確率は  $\boxed{\text{ウエオ}} / \boxed{\text{カキク}}$  である。ウエオ、カキクの値を求めよ。

ウエオ 316 カキク 495

はずれは100本中80本。100本から2本を選ぶ場合の数と、そのうち2本ともはずれになる場合の数を、組合せで数える。

100本から2本を選ぶ場合の数は

$${}_{100}C_2 = \frac{100 \times 99}{2 \times 1} = 4950$$

はずれ80本から2本を選ぶ場合の数は

$${}_{80}C_2 = \frac{80 \times 79}{2 \times 1} = 3160$$

よって求める確率は

$$\frac{3160}{4950} = \frac{316}{495}$$

$$\frac{316}{495}$$

(3)

先生「(1)で求めた期待値74円を踏まえると、参加費を100円に設定した場合の1本あたりの損益はどうなるかな。」

参加費100円を払ってこのくじを1本引くとき、「参加費100円からもらえる商品券の金額を引いた金額」を1本あたりの損益とする。この損益の期待値は  $\boxed{\text{ケコ}}$  円である。ケコの値を求めよ。

ケコ 26

1本あたりの損益は「参加費100円から、もらえる商品券の金額を引いたもの」なので、損益の期待値は「100円」から「もらえる商品券の金額の期待値」を引けば求められる。もらえる商品券の金額の期待値は、(1)で求めた  $E = 74$  円だった。

よって、損益の期待値は

$$100 - 74 = 26 \text{ (円)}$$

(検算：1等が当たったときの損益は $100 - 1000 = -900$  (円)、2等が当たったときの損益は $100 - 300 = -200$  (円)、はずれのときの損益は $100 - 0 = 100$  (円)。それぞれの確率は1等が $\frac{2}{100}$ 、2等が $\frac{18}{100}$ 、はずれが $\frac{80}{100}$ なので、損益の期待値を直接計算しても $(-900) \times \frac{2}{100} + (-200) \times \frac{18}{100} + 100 \times \frac{80}{100} = -18 - 36 + 80 = 26$  (円) で一致する。)

26円

大問5 目標時間 14分／配点 20点

花子さんは、手持ちの50円硬貨と80円硬貨だけを使って、ちょうど1010円を支払いたいと考えている。50円硬貨を $x$ 枚、80円硬貨を $y$ 枚 ( $x, y$ は0以上の整数) とする。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「まず方程式を立てて、両辺を10で割って簡単にしてみよう。」

花子「 $50x + 80y = 1010$ を10で割って、 $5x + 8y = 101$ になりました。」

(1)

先生「 $5x + 8y = 101$ について、 $y$ に0から順に代入して、 $x$ が整数になる場合を探してみよう。」 $5x = 101 - 8y$ だから、 $101 - 8y$ が5の倍数になる $y$ を探すと、これを満たす最小の非負整数は $y = \boxed{\text{ア}}$ である。このときの $x$ の値は $x = \boxed{\text{イウ}}$ である。ア、イウの値を求めよ。

ア 2 イウ 17

$5x = 101 - 8y$ より、 $101 - 8y$ が5の倍数になる $y$ を、0から順に代入して調べる。

$y = 0 : 101 - 0 = 101$  (5の倍数でない)

$y = 1 : 101 - 8 = 93$  (5の倍数でない)

$y = 2 : 101 - 16 = 85 = 5 \times 17$  (5の倍数になった)

よってア=2。

$y = 2$ を $5x + 8y = 101$ に代入すると

$5x = 101 - 16 = 85$

$x = 17$

よってイウ=17。

検算： $50 \times 17 + 80 \times 2 = 850 + 160 = 1010$ （一致）

$$y = 2, x = 17$$

(2)

(1)の特殊解を使うと、一般解は整数 $t$ を用いて $x = 17 - 8t$ ,  $y = 2 + 5t$ と表せる。 $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす $(x, y)$ の組は全部で エ 通りある。エの値を求めよ。

エ 3

$$x = 17 - 8t \geq 0 \text{ より } t \leq \frac{17}{8} = 2.125, \text{ 整数なので } t \leq 2.$$

$$y = 2 + 5t \geq 0 \text{ より } t \geq -\frac{2}{5}, \text{ 整数なので } t \geq 0.$$

よって $t = 0, 1, 2$ の3通り。

$$t = 0 : (x, y) = (17, 2)$$

$$t = 1 : (x, y) = (9, 7)$$

$$t = 2 : (x, y) = (1, 12)$$

3通り

(3)

花子「財布の中の硬貨はできるだけ少なくしたいな。」(2)で求めた3通りのうち、使う硬貨の枚数の合計 $x + y$ が最小になる組を求めよ。 $x =$ オ $, y =$ カキである。オ、カキの値を求めよ。

オ 1 カキ 12

(2)の3通りについて、枚数の合計 $x + y$ を比べる。

$$t = 0 : 17 + 2 = 19 \text{ 枚}$$

$$t = 1 : 9 + 7 = 16 \text{ 枚}$$

$$t = 2 : 1 + 12 = 13 \text{ 枚}$$

$t$ が大きいほど（50円硬貨が減り80円硬貨が増えるほど）合計枚数は減っていくの

で、最小は $t = 2$ のとき。

$x = 1, y = 12$  (合計13枚)

DRILL

## 記述チャレンジ

---

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

**記1** 数I・Aで学ぶ数I・数Aの8章（数と式、集合と命題、2次関数、図形と計量、データの分析、場合の数と確率、図形の性質、数学と人間の活動〈整数〉）は、大きく「式を整理する技術」「数える技術」「論証する技術」「図形をとらえる技術」という4つの働きに整理できる。この4つの働きが、それぞれどの章の内容に対応するかを、具体例を1つずつ挙げながら説明せよ。

数I・Aで学ぶ8章は独立した知識の寄せ集めではなく、「式を整理する」「数える」「論証する」「図形をとらえる」という4つの働きの組み合わせでできている。それぞれ具体例で確かめる。

まず「式を整理する技術」について。2次関数の章で学ぶ平方完成は、 $y = x^2 - 6x + 2$ のような式を $y = (x - 3)^2 - 7$ という形に書きかえる技術であり、この形にするだけで頂点・最大最小・方程式の解までが一度に見えるようになる。数と式の章で学ぶ因数分解も同じ働きをもつ。たとえば整数の性質で $x^2 - y^2 = 45$ のような式が出てきたとき、 $(x - y)(x + y) = 45$ と因数分解することで、はじめて「45を2つの整数の積に分解する」という数えやすい問題に姿を変える。式を整理する技術は、複雑な式を「扱いやすい形」に組みかえるための土台になっている。

次に「数える技術」について。集合と命題の章で学ぶ要素の個数の公式 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ は、「重なった部分を1回だけ引く」という数え方の基本形であり、これは場合の数と確率の章で学ぶ和の法則・積の法則、順列・組合せ、確率の基本へとそのまま発展する。さらに、場合の数と確率の章で学ぶ「期待値」（起こりうる値を確率で重みづけした平均）は、データの分析の章で学ぶ「平均値」とまったく同じ発想でできている。数える技術は、集合・場合の数と確率・データの分析という一見別々の3章を1本の線でつないでいる。

次に「論証する技術」について。集合と命題の章で学ぶ対偶・必要十分条件・背理法は、「 $A \Rightarrow B$ 」と「 $B \Rightarrow A$ 」の両方を確かめるという地道な作業だが、これは整数の性質で「ある数が何の倍数かどうか」を判定する場面（たとえば「6の倍数であること」は「2の倍数かつ3の倍数であること」の必要十分条件になる）や、図形の性質で「四角形が円に内接するかどうか」を対角の和から判定する場面で、そのまま根拠として使われている。論証する技術は、他の章の「なぜその判定でよいのか」を支える裏方の役割を果たしている。

最後に「図形をとらえる技術」について。図形と計量（三角比）の章は「角度と辺の比」で図形を測る技術であり、正弦定理・余弦定理を使えば、角度や辺の一部の情報から残りの辺・角・面積・外接円の半径までを求められる。図形の性質の章は、これとは別に「線分の比の定理（チェバ・メネラウスの定理など）と円の性質（円周角の

定理・方べきの定理など)」で図形の関係を調べる技術であり、角度でなく比や接線の情報が与えられたときに使う。同じ三角形・同じ円を扱う問題でも、与えられている情報の種類によって、この2つの技術のどちらを使うべきかが決まる。図形をとらえる技術は、代数的な計算だけでは見えてこない「図形そのものの構造」を扱うための道具になっている。

このように、数I・Aで学ぶ8章は、表面的にはまったく違う内容を扱っているように見えても、「式を整理する」「数える」「論証する」「図形をとらえる」という少数の働きの組み合わせでできており、だからこそ章をまたいだ融合問題が数多く作れるのである。

高1の8章は「式を整理する技術」(2次関数の平方完成・数と式の因数分解)、「数える技術」(集合の要素の個数から場合の数・確率の期待値へ、そしてデータの分析の平均値と同じ発想へ)、「論証する技術」(集合と命題の必要十分条件・対偶が整数の性質や図形の性質の判定の根拠になる)、「図形をとらえる技術」(三角比の正弦定理・余弦定理と、図形の性質の比の定理・円の性質を、与えられた情報に応じて使い分ける)という4つの働きの組み合わせでできている。

**記2** 三角形ABCにおいて、 $AB = 8$ ,  $AC = 5$ ,  $\angle A = 60^\circ$ である。(1)辺BCの長さを求めよ。(2)三角形ABCの外接円の半径 $R$ を求めよ。(3)三角形ABCの面積 $S$ を求め、さらに内接円の半径 $r$ を求めよ。

この問題は、1組の「2辺と間の角」の情報から出発して、(1)は余弦定理、(2)は正弦定理、(3)は面積公式と内接円の公式 $S = rs$ という、数I「図形と計量」の技術を次々に使っていく問題である。

(1) 辺BCの長さについて。 $\angle A$ をはさむ2辺AB, ACの長さがわかっているので、余弦定理を使う。

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos A = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos 60^\circ \\ &= 64 + 25 - 80 \times \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49 \\ BC > 0 \text{より } BC &= \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$

(2) 外接円の半径 $R$ について。(1)で3辺すべてがわかったので、正弦定理 $\frac{BC}{\sin A} = 2R$ が使える。

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3} \\ \text{よって } R &= \frac{7\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

(3) 面積 $S$ と内接円の半径 $r$ について。面積は、最初にわかっていた「2辺と間の角」を使うのがいちばん早い。

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin 60^\circ = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

内接円の半径は、図形と計量（数I）で学ぶ公式 $S = rs$ （ $s$ は半周長）を使う。3辺は5, 7, 8（(1)で $BC = 7$ と求めたので）なので

$$\begin{aligned} s &= \frac{5 + 7 + 8}{2} = 10 \\ r &= \frac{S}{s} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

このように、同じ1つの三角形について、外接円の半径は正弦定理で、内接円の半径は面積と半周長の関係 $S = rs$ で求める——どちらも数I「図形と計量」で学ぶ技術である。1組の「2辺と角」から出発して、余弦定理・正弦定理・面積公式・内接円の公式を使い分けながら解き進めるこの流れは、高1で学んだ三角比の技術の総仕上げにな

っている。

$$(1)BC = 7 \quad (2)R = \frac{7\sqrt{3}}{3} \quad (3)S = 10\sqrt{3}, r = \sqrt{3}$$