

空間ベクトル

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

成分の計算

2点 $A(2, -1, 3)$ 、 $B(5, 4, -2)$ について、 $\overrightarrow{AB}$ の成分を求めよ。

$$\overrightarrow{AB} = (\underline{3} , \underline{5} , \underline{-5})$$

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 2, 4 - (-1), -2 - 3) = (3, 5, -5)$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 5, -5)$$

2

大きさ

$\vec{a} = (3, 4, 12)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

$$|\vec{a}| = \underline{13}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$|\vec{a}| = 13$$

3

大きさ

$\vec{a} = (1, -2, 2)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

$$|\vec{a}| = \underline{3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{a}| = 3$$

4

内積の計算

$\vec{a} = (2, 1, -1)$ 、 $\vec{b} = (1, 3, 2)$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + 1 \times 3 + (-1) \times 2 = 2 + 3 - 2 = 3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

5

内積の計算

$\vec{a} = (1, 1, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, -1, 1)$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{1}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

6

2点間の距離（大きさ）

2点 $A(0, 0, 0)$ 、 $B(2, -3, 6)$ の距離 $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

$$|\overrightarrow{AB}| = \underline{7}$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, -3, 6)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 7$$

標準（7～13）

7

なす角

$\vec{a} = (1, 1, 0)$ 、 $\vec{b} = (1, 0, 1)$ のなす角 θ を求めよ。

$$\theta = \underline{60}^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

8

垂直条件から未知数を求める

$\vec{a} = (2, -1, 3)$ 、 $\vec{b} = (4, 2, t)$ が垂直であるとき、 t の値を求めよ。

$$t = \underline{-2}$$

垂直条件は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 4 + (-1) \times 2 + 3 \times t = 8 - 2 + 3t = 6 + 3t$$

$$6 + 3t = 0 \text{ より } t = -2$$

$$t = -2$$

2点 $A(1, 0, -2)$ 、 $B(7, 6, 4)$ について、線分ABを $1:2$ に内分する点Pの座標を求めよ。

$$P(\underline{3}, \underline{2}, \underline{0})$$

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{2\vec{a} + 1\vec{b}}{1+2} \\ x\text{成分} &: \frac{2 \times 1 + 7}{3} = \frac{9}{3} = 3 \\ y\text{成分} &: \frac{2 \times 0 + 6}{3} = \frac{6}{3} = 2 \\ z\text{成分} &: \frac{2 \times (-2) + 4}{3} = \frac{0}{3} = 0\end{aligned}$$

$$P(3, 2, 0)$$

2点 $A(3, -2, 5)$ 、 $B(-1, 4, 1)$ の中点Mの座標を求めよ。

$$M(\underline{1}, \underline{1}, \underline{3})$$

中点は $1:1$ に内分する点なので、各成分の平均をとる。

$$x\text{成分} : \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \quad y\text{成分} : \frac{-2 + 4}{2} = 1 \quad z\text{成分} : \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$M(1, 1, 3)$$

$A(2, 0, 1)$ 、 $B(0, 4, 3)$ 、 $C(4, 2, -1)$ を頂点とする三角形の重心Gの座標を求めよ。

$$G(\underline{2}, \underline{2}, \underline{1})$$

$$x\text{成分} : \frac{2 + 0 + 4}{3} = 2 \quad y\text{成分} : \frac{0 + 4 + 2}{3} = 2 \quad z\text{成分} : \frac{1 + 3 + (-1)}{3} = 1$$

$$G(2, 2, 1)$$

12

球面の中心・半径を読み取る

方程式 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 16$ が表す球面の中心の座標と半径を求めよ。

中心 (-1 , 2 , 0) 半径 4

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ の形と見比べる。

$$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 + (z - 0)^2 = 4^2$$

中心 $(-1, 2, 0)$ 、半径 4

13

差のベクトルの大きさ

$\vec{a} = (3, 1, 2)$ 、 $\vec{b} = (1, 2, -1)$ のとき、 $|\vec{a} - \vec{b}|$ を求めよ。

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \underline{\underline{\sqrt{14}}}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (3 - 1, 1 - 2, 2 - (-1)) = (2, -1, 3)$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{14}$$

挑戦 (14~16)

14

平方完成して球面の中心・半径を求める

方程式 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ が表す球面の中心の座標と半径を求めよ。

中心 (1 , -2 , 3) 半径 3

x, y, z それぞれ平方完成する。

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \quad y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4 \quad z^2 - 6z = (z - 3)^2 - 9$$

$$\text{代入すると } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 1 - 4 - 9 + 5 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 1 + 4 + 9 - 5 = 9$$

中心 (1, -2, 3)、半径 3

15

2つのベクトルに垂直なベクトルを求める

$\vec{v} = (x, y, 1)$ が $\vec{a} = (1, 2, -1)$ 、 $\vec{b} = (2, -1, 3)$ の両方に垂直であるとき、 x, y の値を求めよ。

$x =$ -1 $y =$ 1

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \text{ より } x + 2y - 1 = 0 \quad \cdots \text{(i)}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{v} = 0 \text{ より } 2x - y + 3 = 0 \quad \cdots \text{(ii)}$$

$$\text{(i) より } x = 1 - 2y. \text{ (ii) に代入 : } 2(1 - 2y) - y + 3 = 0 \Rightarrow 2 - 4y - y + 3 = 0 \Rightarrow 5 - 5y = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{このとき } x = 1 - 2 \times 1 = -1$$

$$\text{検算 : } \vec{a} \cdot \vec{v} = (-1) + 2 - 1 = 0, \vec{b} \cdot \vec{v} = -2 - 1 + 3 = 0 \text{ (どちらも成立)}$$

$$x = -1, y = 1$$

点Pが z 軸上にあり、2点 $A(1, 2, 2)$ 、 $B(3, 0, 4)$ から等距離であるとき、Pの z 座標を求めよ。 $(P(0, 0, t))$ とおく)

$$t = \underline{4}$$

$$|PA|^2 = 1^2 + 2^2 + (2 - t)^2 = 5 + (2 - t)^2$$

$$|PB|^2 = 3^2 + 0^2 + (4 - t)^2 = 9 + (4 - t)^2$$

$$|PA|^2 = |PB|^2 \text{ より}$$

$$5 + (2 - t)^2 = 9 + (4 - t)^2$$

$$5 + 4 - 4t + t^2 = 9 + 16 - 8t + t^2$$

$$9 - 4t = 25 - 8t$$

$$4t = 16$$

$$t = 4$$

$$t = 4 \text{ (P(0,0,4))}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。四面体・平面上の条件・空間内の最短距離など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

四面体の重心

4点 $A(1, 2, 3)$ 、 $B(3, 0, -1)$ 、 $C(-1, 4, 5)$ 、 $D(3, 2, 1)$ を頂点とする四面体 ABCD の重心 G の座標を求めよ。(4頂点の位置ベクトルの平均になることは、三角形の重心が3頂点の平均になることと同じ考え方)

$G(\underline{3/2}, \underline{2}, \underline{2})$

三角形の重心が3頂点の位置ベクトルの平均であったのと同様に、四面体の重心は4頂点の位置ベクトルの平均になる。

$$x\text{成分} : \frac{1 + 3 + (-1) + 3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$y\text{成分} : \frac{2 + 0 + 4 + 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$z\text{成分} : \frac{3 + (-1) + 5 + 1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$G\left(\frac{3}{2}, 2, 2\right)$$

3点 $A(1, 1, 1)$ 、 $B(3, 2, 0)$ 、 $C(2, 4, -1)$ の定める平面上に点 $D(2, k, -4)$ があるとき、 k の値を求めよ。 $(\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC})$ を満たす実数 s, t が存在することが、Dが平面ABC上にある条件)

$$k = \underline{9}$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1, -1), \overrightarrow{AC} = (1, 3, -2), \overrightarrow{AD} = (1, k - 1, -5)$$

$$\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \text{ とおくと、成分ごとに}$$

$$2s + t = 1 \cdots \text{(i)}$$

$$s + 3t = k - 1 \cdots \text{(ii)}$$

$$-s - 2t = -5 \quad \text{すなわち } s + 2t = 5 \cdots \text{(iii)}$$

$$\text{(iii)-(i)} : -s + t = 4 \text{ より } t = s + 4. \text{ (i) に代入 : } 2s + (s + 4) = 1 \Rightarrow 3s = -3 \Rightarrow s = -1, \text{ よって } t = 3.$$

$$\text{(ii) に代入 : } -1 + 9 = k - 1 \Rightarrow k = 9$$

検算 : $s = -1, t = 3$ のとき $s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1) + (3, 9, -6) = (1, 8, -5)$ となり、 $\overrightarrow{AD} = (1, k - 1, -5) = (1, 8, -5)$ から $k - 1 = 8$ 、 $k = 9$ で一致。

$$k = 9$$

応3

直線上の動点と定点の距離の最小

点Pが $P(t) = (1 + 2t, -t, 2t)$ (t は実数) で表される直線上を動くとき、点 $Q(6, 0, 4)$ との距離 $|PQ|$ の最小値と、そのときの t の値を求めよ。 ($|PQ|^2$ を t の2次関数とみて、平方完成で最小値を求める)

最小値 $\sqrt{5}$ そのとき $t =$ 2

$$P(t) - Q = (1 + 2t - 6, -t - 0, 2t - 4) = (2t - 5, -t, 2t - 4)$$

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= (2t - 5)^2 + t^2 + (2t - 4)^2 \\ &= (4t^2 - 20t + 25) + t^2 + (4t^2 - 16t + 16) \\ &= 9t^2 - 36t + 41 \\ &= 9(t^2 - 4t) + 41 = 9(t - 2)^2 - 36 + 41 = 9(t - 2)^2 + 5 \end{aligned}$$

これは t の2次関数（下に凸）なので、 $t = 2$ のとき最小値 5 をとる。

$$|PQ|^2 = 5 \text{ より } |PQ| = \sqrt{5}$$

$t = 2$ のとき最小値 $\sqrt{5}$

応4

球面上の点と外部の点の距離の最小

点 $Q(1, 2, 11)$ から、球面 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$ 上の点までの距離の最小値を求めよ。

最小値 7

球面の中心は $C(1, 2, 1)$ 、半径は 3 。

$$\begin{aligned} \text{中心Cと点Qの距離: } |CQ| &= \sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (11 - 1)^2} = \\ &= \sqrt{0 + 0 + 100} = 10 \end{aligned}$$

$|CQ| = 10 > 3$ (半径) なので、点Qは球の外部にある。球の外部の点から球面までの最短距離は、中心までの距離から半径を引いたもの (QとCを結ぶ直線が球面と交わる、Cに近い方の点が最短)。

$$10 - 3 = 7$$

最小値 7

4点 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(4, 0, 0)$ 、 $B(0, 4, 0)$ 、 $C(0, 0, 4)$ を頂点とする四面体OABCの重心をGとする。Gの座標と、 $|OG|$ を求めよ。

$$G(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}) \quad |OG| = \underline{\sqrt{3}}$$

4頂点の位置ベクトルの平均をとる。

$$x\text{成分} : \frac{0 + 4 + 0 + 0}{4} = 1 \quad y\text{成分} : \frac{0 + 0 + 4 + 0}{4} = 1 \quad z\text{成分} : \frac{0 + 0 + 0 + 4}{4} = 1$$

よって $G(1, 1, 1)$ 。

$$|OG| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$G(1, 1, 1), |OG| = \sqrt{3}$$