

位置ベクトルと図形

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

内分点の公式

点A, Bの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}$ とする。線分ABを $2:3$ に内分する点Pの位置ベクトルは $\vec{p} = \frac{\square \vec{a} + \square \vec{b}}{\square}$ の形で表される。 $\square$ に入る数をそれぞれ求めよ。

$\vec{a}$ の係数 3 $\vec{b}$ の係数 2 分母 5

$m:n = 2:3$ なので、内分点の公式 $\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$ に $m = 2, n = 3$ を代入する。

$$\vec{p} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$$

2

内分点の公式

線分ABを $3:1$ に内分する点Pの位置ベクトルは $\vec{p} = \frac{\square \vec{a} + \square \vec{b}}{\square}$ の形で表される。 $\square$ に入る数をそれぞれ求めよ。

$\vec{a}$ の係数 1 $\vec{b}$ の係数 3 分母 4

$m:n = 3:1$ なので $m = 3, n = 1$ を公式 $\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$ に代入する。

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4}$$

3

内分点の公式（比が偏っている）

線分ABを $1:4$ に内分する点Pの位置ベクトルは $\vec{p} = \frac{\square \vec{a} + \square \vec{b}}{\square}$ の形で表される。 $\square$ に入る数をそれぞれ求めよ。

$\vec{a}$ の係数 4 $\vec{b}$ の係数 1 分母 5

$m:n = 1:4$ なので $m = 1, n = 4$ を公式 $\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$ に代入する。

$$\vec{p} = \frac{4\vec{a} + \vec{b}}{5}$$

4

外分点の公式

線分ABを $3:1$ に外分する点Qの位置ベクトルは $\vec{q} = \frac{\square \vec{a} + \square \vec{b}}{\square}$ の形で表される。 $\square$ に入る数をそれぞれ求めよ ($\vec{a}$ の係数は負の数になる)。

$\vec{a}$ の係数 -1 $\vec{b}$ の係数 3 分母 2

$m:n = 3:1$ なので $m = 3, n = 1$ を外分点の公式 $\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$ に代入する。分母は $m - n = 3 - 1 = 2 > 0$ 。

$$\vec{q} = \frac{-\vec{a} + 3\vec{b}}{2}$$

5

外分点の公式

線分ABを $5:2$ に外分する点Qの位置ベクトルは $\vec{q} = \frac{\square \vec{a} + \square \vec{b}}{\square}$ の形で表される。 $\square$ に入る数をそれぞれ求めよ。

$\vec{a}$ の係数 -2 $\vec{b}$ の係数 5 分母 3

$m:n = 5:2$ なので $m = 5, n = 2$ を外分点の公式 $\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$ に代入する。分母は $m - n = 5 - 2 = 3$ 。

$$\vec{q} = \frac{-2\vec{a} + 5\vec{b}}{3}$$

三角形ABCの辺BCの中点をMとする。中線AM上で、点Gを $AG : GM = 2 : 1$ に内分する点とするとき、 $\vec{g}$ は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて $\vec{g} = \frac{\square \vec{a} + \square \vec{b} + \square \vec{c}}{\square}$ の形で表される。 $\square$ に入る数をそれぞれ求めよ。

$\vec{a}$ の係数 1 $\vec{b}$ の係数 1 $\vec{c}$ の係数 1 分母 3

$\vec{m} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$ 。 $AG : GM = 2 : 1$ の内分点の公式 ($m = 2, n = 1$) を使うと

$$\vec{g} = \frac{1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{m}}{3} = \frac{\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})}{3}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad (\text{これがGを三角形の重心と呼ぶ理由})$$

標準（7～12） ※A(1, 2), B(7, 5), C(3, -1) を使う

7 点 A(1, 2)、B(7, 5) がある。線分ABを 1 : 2 に内分する点Pの座標を求めよ。

Pの座標 $x =$ 3 $y =$ 3

$$m : n = 1 : 2 \text{ なので } \vec{p} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{2(1, 2) + (7, 5)}{3} = \frac{(2 + 7, 4 + 5)}{3} = \frac{(9, 9)}{3} = (3, 3)$$

$$P(3, 3)$$

- 8 同じ $A(1, 2)$ 、 $B(7, 5)$ について、線分ABを $2 : 1$ に内分する点Qの座標を求めよ。

Qの座標 $x = \underline{5}$ $y = \underline{4}$

$$m : n = 2 : 1 \text{ なので } \vec{q} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} = \frac{(1, 2) + 2(7, 5)}{3} = \frac{(1 + 14, 2 + 10)}{3} = \frac{(15, 12)}{3} = (5, 4)$$

$Q(5, 4)$

- 9 外分 (比の大小に注意)

同じ $A(1, 2)$ 、 $B(7, 5)$ について、線分ABを $3 : 1$ に外分する点Rの座標を求めよ。

Rの座標 $x = \underline{10}$ $y = \underline{13/2}$

$$m : n = 3 : 1 \text{ なので } \vec{r} = \frac{-\vec{a} + 3\vec{b}}{3 - 1} = \frac{-(1, 2) + 3(7, 5)}{2} = \frac{(-1 + 21, -2 + 15)}{2} = \frac{(20, 13)}{2} = (10, 6.5)$$

$R(10, 6.5)$ ($m > n$ なのでRはB側の外側にある)

- 10 外分 (比の大小に注意)

同じ $A(1, 2)$ 、 $B(7, 5)$ について、線分ABを $2 : 5$ に外分する点Sの座標を求めよ。

Sの座標 $x = \underline{-3}$ $y = \underline{0}$

$m : n = 2 : 5$ は $\setminus(mS(-3, 0) \setminus(m$

11 三角形の頂点 $A(1, 2)$ 、 $B(7, 5)$ 、 $C(3, -1)$ の重心Gの座標を求めよ。

Gの座標 $x = \underline{11/3}$ $y = \underline{2}$

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{(1, 2) + (7, 5) + (3, -1)}{3} = \frac{(1 + 7 + 3, 2 + 5 - 1)}{3} = \frac{(11, 6)}{3} = \left(\frac{11}{3}, 2\right)$$

$$G\left(\frac{11}{3}, 2\right)$$

12 共線条件

$A(1, 2)$ 、 $B(7, 5)$ 、 $P(13, 8)$ が一直線上にあるとき、 $\vec{AP} = k\vec{AB}$ となる k の値を求めよ。

$k = \underline{2}$

$$\vec{AB} = (7, 5) - (1, 2) = (6, 3)、\vec{AP} = (13, 8) - (1, 2) = (12, 6)$$

x 成分： $12 = 6k \Rightarrow k = 2$ y 成分： $6 = 3k \Rightarrow k = 2$ 両方一致するので条件を満たす。

$k = 2$ ($k > 1$ なのでPはB側の外分点)

13

交点の位置ベクトル

三角形OABにおいて、辺OAの中点をM、辺OBを $1:2$ に内分する点をNとする。

線分ANと線分BMの交点をPとすると、 $\vec{OP} = (1-s)\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b} = (1-t)\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{a}$ において s, t の値を求めよ。

$$s = \underline{\underline{3/5}} \quad t = \underline{\underline{4/5}}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}, \vec{ON} = \frac{1}{3}\vec{b} \quad (ON : NB = 1 : 2)。$$

$$\text{線分AN上} : \vec{OP} = (1-s)\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b} \quad \text{線分BM上} : \vec{OP} = (1-t)\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{a}$$

$$\text{係数比較} : \vec{a} : 1-s = \frac{t}{2} \quad \vec{b} : \frac{1}{3}s = 1-t$$

$$1\text{つ目より } t = 2(1-s) = 2 - 2s。2\text{つ目に代入} : \frac{1}{3}s = 1 - (2 - 2s) = -1 + 2s$$

$$\frac{1}{3}s - 2s = -1 \Rightarrow -\frac{5}{3}s = -1 \Rightarrow s = \frac{3}{5}$$

$$t = 2 - 2 \cdot \frac{3}{5} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

$$s = \frac{3}{5}, t = \frac{4}{5} \quad (\vec{OP} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b})$$

三角形OABにおいて、辺OAを $1:3$ に内分する点をM、辺OBの中点をNとする。

線分ANと線分BMの交点をPとすると、 $\vec{OP} = (1-s)\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b} = (1-t)\vec{b} + \frac{1}{4}t\vec{a}$ において s, t の値を求めよ。

$$s = \underline{\underline{6/7}} \quad t = \underline{\underline{4/7}}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{4}\vec{a} \quad (OM : MA = 1 : 3), \quad \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{b} \quad (\text{中点}).$$

$$\text{線分AN上: } \vec{OP} = (1-s)\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b} \quad \text{線分BM上: } \vec{OP} = (1-t)\vec{b} + \frac{1}{4}t\vec{a}$$

$$\text{係数比較: } \vec{a}: 1-s = \frac{t}{4} \quad \vec{b}: \frac{1}{2}s = 1-t$$

$$1\text{つ目より } t = 4(1-s) = 4 - 4s. \quad 2\text{つ目に代入: } \frac{1}{2}s = 1 - (4 - 4s) = -3 + 4s$$

$$\frac{1}{2}s - 4s = -3 \Rightarrow -\frac{7}{2}s = -3 \Rightarrow s = \frac{6}{7}$$

$$t = 4 - 4 \cdot \frac{6}{7} = 4 - \frac{24}{7} = \frac{4}{7}$$

$$s = \frac{6}{7}, \quad t = \frac{4}{7} \quad (\vec{OP} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b})$$

15

共線条件 (係数の和が1)

点Pの位置ベクトルが $\vec{p} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$ で表されるとき、点Pは直線AB上にある。

$AP : PB$ を求めよ (コンマ区切りでなく、比を「m」「n」に分けて入力)。

$$AP : PB = \underline{3} : \underline{2}$$

係数の和は $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$ なので、Pは確かに直線AB上にある。

$\vec{p} = (1 - k)\vec{a} + k\vec{b}$ の形と比べると、 $\vec{b}$ の係数が k なので $k = \frac{3}{5}$ (このとき $\vec{a}$ の係数は $1 - k = \frac{2}{5}$ 、一致する)。

$$AP : PB = k : (1 - k) = \frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 3 : 2$$

$$AP : PB = 3 : 2$$

16

共線条件 (外分・係数の和が1)

点Pの位置ベクトルが $\vec{p} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ で表されるとき、点Pは直線AB上にある。

$AP : PB$ を求めよ。

$$AP : PB = \underline{4} : \underline{1}$$

係数の和は $-\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$ なので、Pは直線AB上にある。

$\vec{b}$ の係数が $k = \frac{4}{3}$ (1より大きいのでPはB側の外分点)。

$$AP : PB = k : (k - 1) = \frac{4}{3} : \left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{4}{3} : \frac{1}{3} = 4 : 1$$

$$AP : PB = 4 : 1 \text{ (外分)}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。交点の比を求める「チェバ・メネラウス」型や、位置ベクトルが作る図形の範囲まで、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

セビ안의交点比（チェバ型）

三角形OABにおいて、辺OAを $1:2$ に内分する点をM、辺OBを $1:2$ に内分する点をNとする。線分ANと線分BMの交点をPとすると、 $AP:PN$ と $BP:PM$ をそれぞれ求めよ。

$$AP:PN = \underline{3}:1 \quad BP:PM = \underline{3}:1$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{a}, \vec{ON} = \frac{1}{3}\vec{b} \text{ (どちらも } 1:2 \text{ の内分点)}.$$

$$\text{線分AN上: } \vec{OP} = (1-s)\vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{b} \text{ (} s=0 \text{ でA、} s=1 \text{ でN)}$$

$$\text{線分BM上: } \vec{OP} = (1-t)\vec{b} + \frac{1}{3}t\vec{a} \text{ (} t=0 \text{ でB、} t=1 \text{ でM)}$$

$$\text{係数比較: } \vec{a}:1-s = \frac{t}{3} \quad \vec{b}:\frac{1}{3}s = 1-t$$

$$1\text{つ目より } t = 3(1-s) = 3-3s. \text{ 2つ目に代入: } \frac{1}{3}s = 1 - (3-3s) = -2 +$$

$$\frac{1}{3}s - 3s = -2 \Rightarrow -\frac{8}{3}s = -2 \Rightarrow s = \frac{3}{4}$$

$$t = 3 - 3 \cdot \frac{3}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \text{ (MとNの比が同じなので } s=t \text{ になるのは自然)}$$

$$AP:PN = s:(1-s) = \frac{3}{4}:\frac{1}{4} = 3:1 \quad BP:PM = t:(1-t) = \frac{3}{4}:\frac{1}{4} = 3:1$$

$$AP:PN = 3:1, BP:PM = 3:1$$

点Pの位置ベクトルが $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ (s, t は実数) と表せるとき、 $s + t = 1$ ならPは直線AB上にあり、さらに $s \geq 0, t \geq 0, s + t \leq 1$ の範囲まで広げるとPは三角形OABの周および内部を動くことが知られている (O は原点)。これを踏まえて、 $s = \frac{3}{10}, t = \frac{7}{10}$ のときの $AP : PB$ を求めよ。

$$AP : PB = \underline{7} : \underline{3}$$

$$s + t = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} = 1 \text{ なのでPは直線AB上にある。}$$

$$\vec{b} \text{の係数が } t = \frac{7}{10} \text{ なので、これが } \vec{p} = (1 - k)\vec{a} + k\vec{b} \text{ の } k \text{ にあたる。}$$

$$AP : PB = k : (1 - k) = \frac{7}{10} : \frac{3}{10} = 7 : 3$$

$$AP : PB = 7 : 3$$

三角形OABにおいて、辺OAを $2:1$ に内分する点をM、辺OBを $1:3$ に内分する点をNとする。線分ANと線分BMの交点をPとすると、 $AP:PN$ と $BP:PM$ をそれぞれ求めよ。

$$AP:PN = \underline{2}: \underline{3} \quad BP:PM = \underline{9}: \underline{1}$$

$$\vec{OM} = \frac{2}{3}\vec{a} \quad (OM:MA = 2:1), \quad \vec{ON} = \frac{1}{4}\vec{b} \quad (ON:NB = 1:3)。$$

$$\text{線分AN上: } \vec{OP} = (1-s)\vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{b} \quad \text{線分BM上: } \vec{OP} = (1-t)\vec{b} + \frac{2}{3}t\vec{a}$$

$$\text{係数比較: } \vec{a}: 1-s = \frac{2}{3}t \quad \vec{b}: \frac{1}{4}s = 1-t$$

$$\begin{aligned} 1\text{つ目より } t &= \frac{3}{2}(1-s)。2\text{つ目に代入: } \frac{1}{4}s = 1 - \frac{3}{2}(1-s) = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}s = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s \\ \frac{1}{4}s - \frac{3}{2}s &= -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{5}{4}s = -\frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$t = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$$

$$\begin{aligned} AP:PN &= s:(1-s) = \frac{2}{5}:\frac{3}{5} = 2:3 \quad BP:PM = t:(1-t) = \frac{9}{10}: \\ &\frac{1}{10} = 9:1 \end{aligned}$$

$$AP:PN = 2:3, \quad BP:PM = 9:1$$

点Oを原点とし、平行四辺形OACBがある ($\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$)。対角線OCとABの交点をMとすると、Mが2本の対角線それぞれの中点であることを証明せよ。また、 $\vec{OM} = k(\vec{a} + \vec{b})$ の形で表したときの係数 k を求めよ。

係数 $k = \underline{\underline{1/2}}$

対角線ABの中点を M_1 とすると $\vec{OM}_1 = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ 。

対角線OCの中点を M_2 とすると、 $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ なので $\vec{OM}_2 = \frac{\vec{OC}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ 。

$\vec{OM}_1 = \vec{OM}_2 = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ となり、これは同じ1つの点を指すので、対角線AB, OCはともにこの点Mで交わり、Mは両方の対角線の中点になっている（平行四辺形の対角線は互いの中点で交わる）。

$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ ($k = \frac{1}{2}$)。証明終わり。

三角形ABCの頂点A, B, Cの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とする（原点はどこでもよい）。辺BCを $1:2$ に内分する点をP、辺CAを $1:2$ に内分する点をQとする。線分APと線分BQの交点をSとすると、 $AS:SP$ と $BS:SQ$ をそれぞれ求めよ。

$$AS:SP = \underline{6}: \underline{1} \quad BS:SQ = \underline{3}: \underline{4}$$

$$\vec{p} = \frac{2\vec{b} + \vec{c}}{3} \quad (BP:PC = 1:2), \quad \vec{q} = \frac{2\vec{c} + \vec{a}}{3} \quad (CQ:QA = 1:2)。$$

3頂点 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は係数の和が1の表し方がただ1通りに決まる（STEP3の性質の拡張）ことを使くと、線分AP, BQ上の点も同じように係数比較できる。

$$\text{線分AP上: } \vec{s} = (1-u)\vec{a} + u\vec{p} = (1-u)\vec{a} + \frac{u}{3}(2\vec{b} + \vec{c}) = (1-u)\vec{a} + \frac{2u}{3}\vec{b} + \frac{u}{3}\vec{c}$$

$$\text{線分BQ上: } \vec{s} = (1-v)\vec{b} + v\vec{q} = (1-v)\vec{b} + \frac{v}{3}(2\vec{c} + \vec{a}) = \frac{v}{3}\vec{a} + (1-v)\vec{b} + \frac{2v}{3}\vec{c}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の係数をそれぞれ比較：

$$\vec{a}: 1-u = \frac{v}{3} \quad \vec{b}: \frac{2u}{3} = 1-v \quad \vec{c}: \frac{u}{3} = \frac{2v}{3} \Rightarrow u = 2v$$

$$u = 2v \text{ を1つ目に代入: } 1-2v = \frac{v}{3} \Rightarrow 3-6v = v \Rightarrow 3 = 7v \Rightarrow v = \frac{3}{7}$$

$$u = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7} \quad (\vec{b} \text{ の式でも確認: } \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4}{7}, 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \text{ 一致})$$

$$AS:SP = u:(1-u) = \frac{6}{7}:\frac{1}{7} = 6:1 \quad BS:SQ = v:(1-v) = \frac{3}{7}:\frac{4}{7} = 3:4$$

$$AS:SP = 6:1, BS:SQ = 3:4$$