

内積

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

成分の内積

$\vec{a} = (2, 3)$ 、 $\vec{b} = (4, -1)$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{5}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 4 + 3 \times (-1) = 8 - 3 = 5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$$

2

成分の内積

$\vec{a} = (-1, 5)$ 、 $\vec{b} = (3, 2)$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{7}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \times 3 + 5 \times 2 = -3 + 10 = 7$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$$

3

大きさや角度から

$|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 4$ 、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{6}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$$

4

大きさや角度から・鈍角

$|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 5$ 、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 120° のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{-5}$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \text{ だから}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$$

5

垂直→内積は0

$|\vec{a}| = 4$ 、 $|\vec{b}| = 4$ 、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であるとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{0}$$

垂直 ($\theta = 90^\circ$) のとき $\cos \theta = 0$ だから、大きさの値に関係なく

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

6

成分の内積・負の成分

$\vec{a} = (1, -2)$ 、 $\vec{b} = (-3, 4)$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{-11}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-3) + (-2) \times 4 = -3 - 8 = -11$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -11$$

7

大きさと角度から・正反対

$|\vec{a}| = 5$ 、 $|\vec{b}| = 2$ 、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 180° のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{-10}$$

$$\cos 180^\circ = -1 \text{ だから}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \times 2 \times (-1) = -10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$$

標準 (8~14) ※パターンは自分で判定

8

成分からなす角

$\vec{a} = (1, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, -1)$ のなす角 θ を求めよ。

$$\theta = \underline{90}^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$$

内積が0なので、大きさを計算するまでもなく垂直。

$$\theta = 90^\circ$$

- 9 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ 、 $\vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$ のなす角 θ を求めよ。

$$\theta = \underline{30}^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 1 = 2\sqrt{3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+3} = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 30^\circ$$

- 10 $\vec{a} = (3, 3)$ 、 $\vec{b} = (0, -4)$ のなす角 θ を求めよ。

$$\theta = \underline{135}^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 0 + 3 \times (-4) = -12$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}, |\vec{b}| = 4$$

$$\cos \theta = \frac{-12}{3\sqrt{2} \times 4} = \frac{-12}{12\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = 135^\circ$$

- 11 $\vec{a} = (3, -2)$ 、 $\vec{b} = (4, t)$ が垂直であるとき、 t の値を求めよ。

$$t = \underline{6}$$

垂直条件は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 4 + (-2) \times t = 12 - 2t$$

$$12 - 2t = 0 \text{ より } t = 6$$

$$t = 6$$

12

3つのベクトルを使う垂直条件

$\vec{a} = (1, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, -1)$ 、 $\vec{c} = (2, 1)$ について、 $\vec{a} + t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と垂直になるように t の値を求めよ。

$$t = \underline{-4/5}$$

$$\vec{a} + t\vec{b} = (1 + 3t, 2 - t)$$

垂直条件は $(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ 。

$$(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{c} = 2(1 + 3t) + 1(2 - t) = 2 + 6t + 2 - t = 4 + 5t$$

$$4 + 5t = 0 \text{ より } t = -\frac{4}{5}$$

$$t = -\frac{4}{5}$$

13

 $|\vec{a} + \vec{b}|$ の展開

$|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ のとき、 $|\vec{a} + \vec{b}|$ を求めよ。

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \underline{\sqrt{15}}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 + 2 \times 1 + 9 = 15$$

$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0$ だから

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{15}$$

14

 $|\vec{a} - \vec{b}|$ の展開・角度から

$|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 1$ 、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき、 $|\vec{a} - \vec{b}|$ を求めよ。

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \underline{\sqrt{7}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 1 \times \cos 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 - 2 \times \frac{3}{2} + 1 = 9 - 3 + 1 = 7$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$$

挑戦 (15~18)

15

複雑な式の展開

$|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 1$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ のとき、 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b})$ の値を求めよ。

値は 10

文字式の展開と同じ要領で分配する。

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - 3\vec{b} \cdot \vec{b}$$

$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ (交換法則) なので、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の項をまとめると

$$= 2|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2$$

$$= 2 \times 4 - 5 \times (-1) - 3 \times 1 = 8 + 5 - 3 = 10$$

値は 10

16

大きさが等しいベクトルの性質

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ 、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき、 $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} - \vec{b}$ のなす角を求めよ。

なす角は 90 °

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ を展開する ($(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ と同じ形)。

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \text{ なので } |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 1 - 1 = 0$$

内積が0になったので、 60° という角度の値にかかわらず $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} - \vec{b}$ は垂直である (どちらも $\vec{0}$ でないことは別途確認できる)。

なす角は 90°

17

垂直条件とtの決定

$|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ 、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき、 $\vec{a} + t\vec{b}$ が $\vec{a}$ と垂直になるように t の値を求めよ。

$$t = \underline{-4/3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 \times \cos 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

垂直条件は $\vec{a} \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) = 0$ 。

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 3t$$

$$4 + 3t = 0 \text{ より } t = -\frac{4}{3}$$

$$t = -\frac{4}{3}$$

18

垂直条件からの展開

$|\vec{a}| = \sqrt{5}$ 、 $|\vec{b}| = 1$ 、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であるとき、 $|\vec{a} - 2\vec{b}|$ を求めよ。

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| = \underline{3}$$

垂直なので $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 5 - 0 + 4 = 9$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| = 3$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。内積の使いどころが一気に広がる場面に挑戦しよう。

応1

$|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値

$|\vec{a}| = 3$ 、 $|\vec{b}| = 2$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ のとき、実数 t を動かすとき $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値と、そのときの t の値を求めよ。

最小値 $\sqrt{35}/2$ そのとき $t =$ $-1/4$

$|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ を展開して t の2次式にまとめる（ t の関数として最小値を考える）。

$$|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 = 9 + 2t + 4t^2 = 4t^2 + 2t + 9$$

平方完成する。

$$4t^2 + 2t + 9 = 4\left(t^2 + \frac{1}{2}t\right) + 9 = 4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 9 = 4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{35}{4}$$

$t = -\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{35}{4}$ をとる。これは $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ の最小値なので、 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ の最小値はその平方根。

$$\sqrt{\frac{35}{4}} = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$t = -\frac{1}{4} \text{ のとき最小値 } \frac{\sqrt{35}}{2}$$

応2

内積による三角形の面積公式

三角形OABにおいて、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (4, 0)$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (1, 3)$ であるとき、三角形OABの面積 S を求めよ。次の面積公式を利用してよい。

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$$S = \underline{6}$$

まず必要な値を成分から求める。

$$|\vec{a}|^2 = 4^2 + 0^2 = 16$$

$$|\vec{b}|^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 1 + 0 \times 3 = 4$$

公式に代入する。

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{16 \times 10 - 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{160 - 16} = \frac{1}{2} \sqrt{144} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$$S = 6$$

応3

$|\vec{a} - \vec{b}|$ の展開＝余弦定理と同じ形

$|\vec{a}| = 5$ 、 $|\vec{b}| = 8$ 、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき、 $|\vec{a} - \vec{b}|$ を求めよ。

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \underline{7}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \times 8 \times \cos 60^\circ = 40 \times \frac{1}{2} = 20$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 25 - 40 + 64 = 49$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 7$$

(これは、2辺が5と8、その間の角が 60° の三角形の3辺目の長さを求める**余弦定理**とまったく同じ計算になっている。内積の展開は図形の性質とつながっている。)

応4

角度によらない垂直条件

$|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ のとき、 $\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{a} - t\vec{b}$ が垂直になるように、実数 t の値をすべて求めよ。(コンマ区切りで入力)

$$t = \underline{2/3, -2/3}$$

$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ と同じ形で展開する。

$$(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{a} - t\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - t\vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{b} \cdot \vec{a} - t^2\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - t^2|\vec{b}|^2$$

($\vec{a} \cdot \vec{b}$ を含む2つの項は符号が逆で打ち消し合うので、なす角の値によらず成り立つ)

垂直条件は $|\vec{a}|^2 - t^2|\vec{b}|^2 = 0$ 。

$$4 - 9t^2 = 0$$

$$t^2 = \frac{4}{9}$$

$$t = \pm \frac{2}{3}$$

$$t = \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$$

応5

$|\vec{a} + \vec{b}|$ から内積となす角を逆算

$|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ 、 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値と、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{-3} \quad \theta = \underline{120}^\circ$$

$|\vec{a} + \vec{b}|^2$ の展開公式に、わかっている値を代入して $\vec{a} \cdot \vec{b}$ について解く。

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$7 = 4 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 = 13 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 - 13 = -6$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$$

なす角は $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-3}{2 \times 3} = -\frac{1}{2}$ から求める。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -3, \theta = 120^\circ$$

