

ベクトルの演算

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～8）

1

成分の和

$\vec{a} = (3, -2)$ 、 $\vec{b} = (-1, 5)$ のとき、 $\vec{a} + \vec{b}$ を成分で求めよ。

(2 , 3)

$$\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1), -2 + 5)$$

(2, 3)

2

成分の差

$\vec{a} = (4, 1)$ 、 $\vec{b} = (2, 5)$ のとき、 $\vec{a} - \vec{b}$ を成分で求めよ。

(2 , -4)

$$\vec{a} - \vec{b} = (4 - 2, 1 - 5)$$

(2, -4)

3

実数倍の成分

$\vec{a} = (-3, 2)$ のとき、 $3\vec{a}$ を成分で求めよ。

(-9 , 6)

$$3\vec{a} = (3 \times (-3), 3 \times 2)$$

$$(-9, 6)$$

4

大きさ（整数になる）

$\vec{a} = (3, 4)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

$$|\vec{a}| = \underline{5}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{a}| = 5$$

5

大きさ（√がつく）

$\vec{a} = (1, 2)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

$$|\vec{a}| = \underline{\sqrt{5}}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5}$$

6

和・実数倍の複合

$\vec{a} = (2, -1)$ 、 $\vec{b} = (-3, 4)$ のとき、 $2\vec{a} - \vec{b}$ を成分で求めよ。

(7 , -6)

$$2\vec{a} = (4, -2)$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = (4 - (-3), -2 - 4)$$

$$(7, -6)$$

7

2点から成分・逆ベクトル

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ 、 $A(1, 2)$ 、 $B(4, -1)$ のとき、 $\vec{a}$ と $-\vec{a}$ をそれぞれ成分で表せ。

$\vec{a} = (\underline{3} , \underline{-3})$ $-\vec{a} = (\underline{-3} , \underline{3})$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (4 - 1, -1 - 2) = (3, -3)$$

$$-\vec{a} = (-3, 3)$$

$$\vec{a} = (3, -3)、-\vec{a} = (-3, 3)$$

8

大きさ（負の成分）

$\vec{a} = (-2, -3)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

$|\vec{a}| = \underline{\sqrt{13}}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{13}$$

9

平行条件からkを求める

$\vec{a} = (2, 3)$ 、 $\vec{b} = (6, 9)$ は平行である。 $\vec{b} = k\vec{a}$ を満たす実数 k を求めよ。

$$k = \underline{3}$$

$$\vec{b} = (6, 9) = 3 \times (2, 3) = 3\vec{a}$$

$$k = 3$$

10

平行条件から未知成分を求める

$\vec{a} = (2, 3)$ 、 $\vec{b} = (x, 6)$ が平行であるとき、 x の値を求めよ。

$$x = \underline{4}$$

$$\text{平行条件 } a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \text{ より } 2 \times 6 - 3 \times x = 0$$

$$12 - 3x = 0 \text{ より } x = 4 \text{ (このとき } \vec{b} = (4, 6) = 2\vec{a} \text{)}$$

$$x = 4$$

11

分解 (s, tを求める)

$\vec{a} = (1, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, 1)$ 、 $\vec{c} = (11, 7)$ のとき、 $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ を満たす s, t の値を求めよ。

$$s = \underline{2} \quad t = \underline{3}$$

$$x\text{成分: } s + 3t = 11 \quad y\text{成分: } 2s + t = 7$$

$$2\text{つ目の式から } t = 7 - 2s. \text{ 1つ目に代入すると } s + 3(7 - 2s) = 11$$

$$s + 21 - 6s = 11 \text{ より } -5s = -10, s = 2. t = 7 - 2 \times 2 = 3.$$

$$\text{検算: } 2(1, 2) + 3(3, 1) = (2, 4) + (9, 3) = (11, 7) \text{ 一致.}$$

$$s = 2, t = 3$$

12

大きさ（数字が大きめ）

 $\vec{a} = (5, -12)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

$|\vec{a}| = \underline{13}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$|\vec{a}| = 13$$

13

実数倍の複合（係数が大きい）

 $\vec{a} = (4, -3)$ 、 $\vec{b} = (-2, 5)$ のとき、 $2\vec{a} - 3\vec{b}$ を成分で求めよ。

$(\underline{14}, \underline{-21})$

$$2\vec{a} = (8, -6)、3\vec{b} = (-6, 15)$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = (8 - (-6), -6 - 15)$$

$$(14, -21)$$

14

ベクトルの等式から未知数

 $\vec{a} = (x, 4)$ 、 $\vec{b} = (3, y)$ が $\vec{a} = 2\vec{b}$ を満たすとき、 x, y の値を求めよ。

$x = \underline{6} \quad y = \underline{2}$

$$2\vec{b} = (6, 2y)。 \vec{a} = 2\vec{b} \text{ より } (x, 4) = (6, 2y)$$

$$x\text{成分} : x = 6 \quad y\text{成分} : 4 = 2y \text{ より } y = 2$$

$$x = 6, y = 2$$

15

大きさから未知成分を求める

$\vec{a} = (x, 4)$ の大きさが 5 であるとき、 x の値を求めよ。ただし $x > 0$ とする。

$$x = \underline{3}$$

$$|\vec{a}|^2 = x^2 + 16 = 25 \text{ より } x^2 = 9$$

$$x > 0 \text{ より } x = 3$$

$$x = 3$$

挑戦 (16~18)

16

平行+大きさの条件を両方満たす

$\vec{a} = (3, 4)$ と同じ向きで平行、かつ大きさが 15 であるベクトル $\vec{b}$ を成分で求めよ。

$$\vec{b} = (\underline{9}, \underline{12})$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5。 \vec{a} \text{ と同じ向きの単位ベクトルは } \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)。$$

大きさ15にするには単位ベクトルを15倍すればよい。

$$\vec{b} = 15 \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (9, 12)$$

$$\text{検算: } |\vec{b}| = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$

$$\vec{b} = (9, 12)$$

17

平行条件 (kが負の分数になる)

$\vec{a} = (-4, 6)$ 、 $\vec{b} = (6, -9)$ は平行である。 $\vec{b} = k\vec{a}$ を満たす実数 k を求めよ。

$$k = \underline{-3/2}$$

x成分から $6 = k \times (-4)$ より $k = -\frac{3}{2}$

検算 (y成分) : $k \times 6 = -\frac{3}{2} \times 6 = -9$ で $\vec{b}$ のy成分と一致

$$k = -\frac{3}{2}$$

18

分解 (sが分数になる)

$\vec{a} = (2, 4)$ 、 $\vec{b} = (1, -3)$ 、 $\vec{c} = (2, 9)$ のとき、 $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ を満たす s, t の値を求めよ。

$$s = \underline{3/2} \quad t = \underline{-1}$$

x成分 : $2s + t = 2$ y成分 : $4s - 3t = 9$

1つ目の式から $t = 2 - 2s$ 。2つ目に代入すると $4s - 3(2 - 2s) = 9$

$4s - 6 + 6s = 9$ より $10s = 15$ 、 $s = \frac{3}{2}$ 。 $t = 2 - 2 \times \frac{3}{2} = -1$ 。

検算 : $\frac{3}{2}(2, 4) + (-1)(1, -3) = (3, 6) + (-1, 3) = (2, 9)$ 一致。

$$s = \frac{3}{2}, t = -1$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

単位ベクトル

$\vec{a} = (3, -4)$ と同じ向きの単位ベクトル（大きさ1のベクトル）を成分で求めよ。

(3/5 , -4/5)

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

単位ベクトルは、もとのベクトルを自分の大きさを割ったもの（同じ向きのまま大きさだけ1にする）。

$$\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{5} (3, -4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$$

$$\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$$

応2

平行条件から係数（2次方程式になる）

$\vec{a} = (x, 2)$ 、 $\vec{b} = (3, x - 1)$ が平行であるとき、 x の値をすべて求めよ。（コンマ区切りで入力）

$x =$ 3,-2

平行条件 $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ より $x(x - 1) - 2 \times 3 = 0$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

左辺を因数分解すると $(x - 3)(x + 2) = 0$

$x = 3$ のとき $\vec{a} = (3, 2)$ 、 $x = -2$ のとき $\vec{a} = (-2, 2)$ 。どちらもx成分が0でない
ので平行条件がそのまま使え、条件を満たす。

$$x = 3, -2$$

応3

分解の本格問題（線分を分ける点）

点Pは線分AB上にあり、 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ を満たす。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、 $\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表される。 s, t の値を求めよ。

$$s = \underline{\underline{2/3}} \quad t = \underline{\underline{1/3}}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} \\ \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \\ s &= \frac{2}{3}, t = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

応4

平行条件からの係数比較

$\vec{a}, \vec{b}$ はともに $\vec{0}$ でなく、互いに平行でないとする。 $(s-2)\vec{a} = (1-2t)\vec{b}$ を満たす実数 s, t の値を求めよ。

$$s = \underline{\underline{2}} \quad t = \underline{\underline{1/2}}$$

もし $s-2 \neq 0$ なら、 $\vec{a} = \frac{1-2t}{s-2}\vec{b}$ となり、 $\vec{a}$ が $\vec{b}$ の実数倍で表せてしまう $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行、となって「平行でない」という前提に反する。
したがって $s-2=0$ 、つまり $s=2$ 。
このとき左辺は $\vec{0}$ なので、右辺も $\vec{0}$ でなければならない。 $\vec{b} \neq \vec{0}$ なので $1-2t=0$ 、つまり $t = \frac{1}{2}$ 。

$$s = 2, t = \frac{1}{2}$$

点Qは $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ を満たす点である（QはABの延長上にある）。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、 $\overrightarrow{OQ} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表される。 s, t の値を求めよ。

$$s = \underline{-1/2} \quad t = \underline{3/2}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} = \vec{a} + \frac{3}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} - \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

係数の和が1になっていない・符号が負になっていることからわかるように、QはABの内側ではなく延長線上（外側）の点になっている。

$$s = -\frac{1}{2}, t = \frac{3}{2}$$