

ベクトル まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

成分の和

$\vec{a} = (4, -3)$ 、 $\vec{b} = (-2, 6)$ のとき、 $\vec{a} + \vec{b}$ を成分で求めよ。

(2 , 3)

$$\vec{a} + \vec{b} = (4 + (-2), -3 + 6)$$

$$(2, 3)$$

2

実数倍の複合

$\vec{a} = (1, 4)$ 、 $\vec{b} = (3, -2)$ のとき、 $3\vec{a} - 2\vec{b}$ を成分で求めよ。

(-3 , 16)

$$3\vec{a} = (3, 12)、2\vec{b} = (6, -4)$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = (3 - 6, 12 - (-4))$$

$$(-3, 16)$$

3

大きさ

$\vec{a} = (6, 8)$ の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

$$|\vec{a}| = \underline{10}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$|\vec{a}| = 10$$

4

平行条件からk

$\vec{a} = (3, -1)$ 、 $\vec{b} = (-9, 3)$ は平行である。 $\vec{b} = k\vec{a}$ を満たす実数 k を求めよ。

$$k = \underline{-3}$$

x成分から $-9 = 3k$ より $k = -3$ 。y成分でも $3 = -1 \times (-3) = 3$ で一致。

$$k = -3$$

5

分解 (s, tを求める)

$\vec{a} = (2, 1)$ 、 $\vec{b} = (1, 3)$ 、 $\vec{c} = (7, 11)$ のとき、 $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$ を満たす s, t の値を求めよ。

$$s = \underline{2} \quad t = \underline{3}$$

$$\text{x成分: } 2s + t = 7 \quad \text{y成分: } s + 3t = 11$$

$$1\text{つ目から } t = 7 - 2s. \text{ 2つ目に代入すると } s + 3(7 - 2s) = 11$$

$$s + 21 - 6s = 11 \text{ より } -5s = -10, s = 2. t = 7 - 4 = 3.$$

$$\text{検算: } 2(2, 1) + 3(1, 3) = (4, 2) + (3, 9) = (7, 11) \text{ 一致.}$$

$$s = 2, t = 3$$

6

内積の成分計算

$\vec{a} = (3, -2)$ 、 $\vec{b} = (4, 5)$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 4 + (-2) \times 5 = 12 - 10 = 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

7

大きさと角度から内積

$|\vec{a}| = 6$ 、 $|\vec{b}| = 4$ 、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{12}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$$

8

垂直条件からtを求める

$\vec{a} = (4, -3)$ 、 $\vec{b} = (t, 8)$ が垂直であるとき、 t の値を求めよ。

$$t = \underline{6}$$

垂直条件は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4t + (-3) \times 8 = 4t - 24$$

$$4t - 24 = 0 \text{ より } t = 6$$

$$t = 6$$

9

|a+b|の展開公式

$|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ のとき、 $|\vec{a} + \vec{b}|$ を求めよ。

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \underline{\underline{\sqrt{11}}}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2^2 + 2 \times (-1) + 3^2 = 4 - 2 + 9 = 11$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0 \text{ だから}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{11}$$

10

内分点

$A(1, 4)$ 、 $B(7, -2)$ について、線分ABを $2 : 1$ に内分する点Pの座標を求めよ。

$$P(\underline{\underline{5}}, \underline{\underline{0}})$$

$$\begin{aligned} \text{内分点の公式 } (m : n = 2 : 1) : \vec{p} &= \frac{1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{2 + 1} \\ \vec{p} &= \frac{(1, 4) + 2(7, -2)}{3} = \frac{(1 + 14, 4 - 4)}{3} = \frac{(15, 0)}{3} = (5, 0) \end{aligned}$$

$$P(5, 0)$$

11

外分点

$A(1, 2)$ 、 $B(4, 5)$ について、線分ABを $2 : 1$ に外分する点Qの座標を求めよ。

$$Q(\underline{\underline{7}}, \underline{\underline{8}})$$

$$\begin{aligned} \text{外分点の公式 } (m : n = 2 : 1) : \vec{q} &= \frac{-1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{2 - 1} = -\vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{q} &= -(1, 2) + 2(4, 5) = (-1, -2) + (8, 10) = (7, 8) \end{aligned}$$

$$Q(7, 8)$$

12

重心

$A(2, 5)$ 、 $B(-1, 3)$ 、 $C(8, -2)$ を頂点とする三角形の重心 G の座標を求めよ。

$G(\underline{3}, \underline{2})$

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{(2, 5) + (-1, 3) + (8, -2)}{3} = \frac{(9, 6)}{3} = (3, 2)$$

$G(3, 2)$

13

共線条件

$A(1, 1)$ 、 $B(4, 3)$ 、 $P(10, 7)$ について、3点が一直線上にあるかどうかを調べ、あるならば $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ となる k を求めよ。

$k = \underline{3}$

$$\overrightarrow{AB} = (4, 3) - (1, 1) = (3, 2), \overrightarrow{AP} = (10, 7) - (1, 1) = (9, 6)$$

$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ を確認：x成分から $9 = 3k$ より $k = 3$ 、y成分から $6 = 2k$ より $k = 3$ 。両方一致するので3点は一直線上にある ($k > 1$ なのでPはB側の外分点にあたる位置)。

3点は一直線上にあり、 $k = 3$

14

空間：成分と大きさ

2点 $A(1, 0, 2)$ 、 $B(4, 4, 14)$ について、 $\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを求めよ。

$\overrightarrow{AB} = (\underline{3}, \underline{4}, \underline{12}) \quad |\overrightarrow{AB}| = \underline{13}$

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 4 - 0, 14 - 2) = (3, 4, 12)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 4, 12), |\overrightarrow{AB}| = 13$$

15

空間：内積と垂直判定

$\vec{a} = (2, -1, 3)$ 、 $\vec{b} = (1, 5, 1)$ は垂直であるかどうか調べよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{\quad 0 \quad}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1) \times 5 + 3 \times 1 = 2 - 5 + 3 = 0$$

内積が0なので、垂直条件を満たす。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ (垂直である)}$$

発展 (16~25)

16

空間：重心

$A(3, -2, 1)$ 、 $B(-1, 4, 5)$ 、 $C(4, 1, -3)$ を頂点とする三角形の重心Gの座標を求めよ。

$$G(\underline{\quad 2 \quad}, \underline{\quad 1 \quad}, \underline{\quad 1 \quad})$$

$$x\text{成分} : \frac{3 + (-1) + 4}{3} = 2 \quad y\text{成分} : \frac{-2 + 4 + 1}{3} = 1 \quad z\text{成分} : \frac{1 + 5 + (-3)}{3} = 1$$

$$G(2, 1, 1)$$

方程式 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 5 = 0$ が表す球面の中心と半径を求めよ。

中心 (3 , -2 , 1) 半径 3

x, y, z それぞれについて平方完成する。

$$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$$

$$y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$$

$$z^2 - 2z = (z - 1)^2 - 1$$

代入すると

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 + (z - 1)^2 - 1 + 5 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9 + 4 + 1 - 5 = 9$$

中心(3, -2, 1)、半径3

$\vec{a} = (x, 3)$ 、 $\vec{b} = (4, x + 1)$ が平行であるとき、 x の値をすべて求めよ。（コンマ区切りで入力）

$$x = \underline{-4, 3}$$

平行条件 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ を成分に当てはめると

$$x(x + 1) - 3 \times 4 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

左辺を因数分解すると $(x + 4)(x - 3) = 0$ となり、 $x = -4$ と $x = 3$ の2通りの場合がある。平行条件は成分の関係式にすぎず、 x の値が2次方程式を満たすかぎり両方とも解になりうるので、どちらの場合も棄却せずに検証する必要がある。

$x = -4$ のとき： $\vec{a} = (-4, 3)$ 、 $\vec{b} = (4, -3)$ 。 $\vec{b} = -\vec{a}$ となっており、確かに平行（ $k = -1$ ）。

$x = 3$ のとき： $\vec{a} = (3, 3)$ 、 $\vec{b} = (4, 4)$ 。 $\vec{b} = \frac{4}{3}\vec{a}$ となっており、確かに平行（ $k = \frac{4}{3}$ ）。

どちらの場合も $\vec{a} \neq \vec{0}$ 、 $\vec{b} \neq \vec{0}$ を満たしているので、2つとも解として採用できる。

$$x = -4, 3$$

三角形OABにおいて、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (1, 3)$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (3, 1)$ とする。辺OB上の点Pを $\overrightarrow{OP} = t\vec{b}$ (t は実数) となるようにとり、 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{OB}$ となるように t の値を求めよ。

$$t = \underline{\underline{3/5}}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t\vec{b} - \vec{a}$$

垂直条件 $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{b} = 0$ に代入する (分配法則で展開)。

$$(t\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = t|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 3 + 3 \times 1 = 3 + 3 = 6$$

$$|\vec{b}|^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$10t - 6 = 0 \text{ より } t = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{検算: } \overrightarrow{OP} = \frac{3}{5}(3, 1) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right), \overrightarrow{AP} = \left(\frac{9}{5} - 1, \frac{3}{5} - 3\right) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{b} = \frac{4}{5} \times 3 + \left(-\frac{12}{5}\right) \times 1 = \frac{12}{5} - \frac{12}{5} = 0 \text{ 一致。}$$

$$t = \frac{3}{5}$$

三角形OABにおいて、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。辺OA上に $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\vec{a}$ となる点Cを、辺OB上に $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{b}$ となる点Dをとる。線分CDを $1:2$ に内分する点をPとすると、 $\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表される。 s, t の値を求めよ。

$$s = \underline{\underline{4/9}} \quad t = \underline{\underline{1/6}}$$

Pは線分CDを $1:2$ に内分する点なので、内分点の公式 ($m:n=1:2$) をC, Dに対して使う。

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OC} + 1 \cdot \overrightarrow{OD}}{1+2} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}}{3} = \frac{\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}}{3} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

$$s = \frac{4}{9}, t = \frac{1}{6}$$

三角形OABにおいて、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (5, 1)$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (2, 4)$ であるとき、三角形OABの面積 S を求めよ。次の面積公式を利用してよい。

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$$S = \underline{\underline{9}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \times 2 + 1 \times 4 = 10 + 4 = 14$$

$$|\vec{a}|^2 = 5^2 + 1^2 = 26, |\vec{b}|^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = 26 \times 20 = 520, (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 14^2 = 196$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{520 - 196} = \frac{1}{2} \sqrt{324} = \frac{1}{2} \times 18 = 9$$

$$S = 9$$

$\vec{a} = (3, -4)$ と平行で、大きさが 10 であるベクトル $\vec{b}$ を求めよ。 $\vec{a}$ と同じ向きのときと、逆向きのときの両方を答えよ。

同じ向き $\vec{b} = (\underline{6}, \underline{-8})$ 逆向き $\vec{b} = (\underline{-6}, \underline{8})$

$\vec{a}$ と平行なベクトルは「同じ向き」と「逆向き」の2通りが必ず存在するので、どちらの場合も求める必要がある。

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ 。 $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ 。

同じ向きで大きさ10: $\vec{b} = 10 \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = (6, -8)$

逆向きで大きさ10: $\vec{b} = -10 \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = (-6, 8)$

検算: $|(6, -8)| = \sqrt{36 + 64} = 10$ 、 $|(-6, 8)| = \sqrt{36 + 64} = 10$ 、いずれも $\vec{a}$ の実数倍になっている。

同じ向き $\vec{b} = (6, -8)$ 、逆向き $\vec{b} = (-6, 8)$

3点 $A(1, 2)$ 、 $B(4, 8)$ 、 $C(m, 20)$ が一直線上にあるとき、 m の値を求めよ。

$m = \underline{10}$

$\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 8 - 2) = (3, 6)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (m - 1, 20 - 2) = (m - 1, 18)$

3点が一直線上にある条件は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ が平行、つまり

$$3 \times 18 - 6 \times (m - 1) = 0$$

$$54 - 6m + 6 = 0$$

$$6m = 60 \text{ より } m = 10$$

検算: $\overrightarrow{AC} = (9, 18) = 3(3, 6) = 3\overrightarrow{AB}$ 、確かに平行。

$m = 10$

空間内の三角形OABにおいて、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (1, 0, 1)$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (0, 2, 1)$ とする。辺OB上の点Pを $\overrightarrow{OP} = t\vec{b}$ (t は実数) となるようにとり、 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{OB}$ となるように t の値を求めよ。

$$t = \underline{\underline{1/5}}$$

平面のとき（19番）とまったく同じ考え方で、成分が1つ増えるだけ。

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t\vec{b} - \vec{a}$$

垂直条件 $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{b} = 0$:

$$(t\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = t|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 0 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 1$$

$$|\vec{b}|^2 = 0^2 + 2^2 + 1^2 = 5$$

$$5t - 1 = 0 \text{ より } t = \frac{1}{5}$$

$$t = \frac{1}{5}$$

点 $A(1, 2, -1)$ を中心とし、点 $B(4, 6, -1)$ を通る球面がある。この球面の半径 r を求めよ。また、この球面上に点 $C(1, 2, -6)$ があるかどうかを、距離 AC を求めて調べよ。

$$\text{半径 } r = \underline{5} \quad AC = \underline{5}$$

半径は中心Aから球面上の点Bまでの距離に等しい。

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 6 - 2, -1 - (-1)) = (3, 4, 0)$$

$$r = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

次に距離ACを求める。

$$\overrightarrow{AC} = (1 - 1, 2 - 2, -6 - (-1)) = (0, 0, -5)$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$AC = 5 = r$ なので、点Cは中心Aから半径と同じ距離にある。したがって点Cはこの球面上にある。

半径 $r = 5$ 、 $AC = 5$ ($AC = r$ なので点Cは球面上にある)

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

この章では、内分点の公式・外分点の公式・共線条件という一見別々の公式が登場する。これらが実はすべて「係数の和が1になる形で点を表す」という同じ考え方から生まれていることを、内分点の公式の導出過程に触れながら説明せよ。

点Oを基準に、点Aの位置ベクトルを $\vec{a}$ 、点Bの位置ベクトルを $\vec{b}$ とする。線分ABを $m:n$ に内分する点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ は、 $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$ であることから

$$\vec{p} = \vec{a} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{(m+n)\vec{a} - m\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

と求まる。ここで係数だけに注目すると、 $\vec{a}$ の係数は $\frac{n}{m+n}$ 、 $\vec{b}$ の係数は $\frac{m}{m+n}$ であり、この2つを足すと $\frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = \frac{m+n}{m+n} = 1$ になっている。つまり内分点は、必ず「 $\vec{a}$ の係数と $\vec{b}$ の係数の和が1になる形」 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ ($s+t=1$) で書けている。

外分点の公式 $\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$ も、係数を確認すると $\frac{-n}{m-n} + \frac{m}{m-n} = \frac{m-n}{m-n} = 1$ となり、やはり和は1である。内分・外分という見た目の違いは「点が線分の内側にあるか、延長線上にあるか」という位置の違いにすぎず、式の形としては同じ「係数の和が1」というルールに従っている。

そして共線条件も、同じことの逆向きの言い方にすぎない。 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ ($s+t=1$) と表せる点Pは、 $t=k$ 、 $s=1-k$ とおけば $\vec{p} = (1-k)\vec{a} + k\vec{b}$ 、すなわち $\vec{p} - \vec{a} = k(\vec{b} - \vec{a})$ 、つまり $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ となり、これはPが直線AB上にあることそのものを表している。

このように、内分点・外分点・共線条件はすべて「点Pの位置ベクトルを、係数の和が1になる形で $\vec{a}$, $\vec{b}$ を使って表す」という1つの考え方の、異なる場面での現れ方にすぎない。

内分点・外分点はいずれも係数の和が1になる形 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ ($s+t=1$) で書け、共線条件はこの形で書けることそのものを「直線AB上にある」条件として言い換えたものである。

記2 平面ベクトルの成分計算（大きさ・内積・垂直条件・内分点の公式）は、空間ベクトルでも形をまったく変えずに使える。成分が2つから3つに増えることで、実際には何が変わり、何がかわらないのかを説明せよ。

まず変わらないものについて。大きさの公式は、平面では $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ 、空間では $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ であり、これはどちらも三平方の定理（座標平面では2乗の和、座標空間では3成分の2乗の和）をそのまま使っているにすぎない。内積についても、平面では $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ 、空間では $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ であり、「対応する成分どうしをかけて全部足す」という計算のルールそのものは変わっていない。垂直条件 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ や、内分点の公式 $\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$ 、重心の公式 $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ も、式の形自体は平面とまったく同じで、成分ごとに同じ計算を1回多くくり返すだけで空間でもそのまま成り立つ。

一方で変わるものは、成分の個数と、それにとまって増える計算量である。空間では x, y, z の3つの成分があるので、大きさなら2乗の項が2つから3つに、内積なら積の項が2つから3つに増える。また、平面では「平行でない2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ があれば、どんなベクトルも $s\vec{a} + t\vec{b}$ の形にただ1通りに表せた」が、空間ではこれが「同じ平面上にない3つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ があれば $s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ の形に表せる」というように、必要なベクトルの本数が1本増える（この点は本章では深く扱わないが、次数が1つ上がったことの現れである）。

つまり、公式の「形」や「考え方」は成分の数に関係なく共通しているが、実際に手を動かす際の「項の数」だけが増える。これが、空間ベクトルの学習が平面ベクトルの単なる繰り返しの延長として位置づけられる理由である。

公式の形・考え方（大きさ、内積、垂直条件、内分点・重心の公式）は成分の数に関係なく共通しており、変わるのは計算する項の数（2項→3項）だけである。

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分/配点 20点

太郎さんと花子さんは、公園にある噴水を原点Oとして、東向きを x 軸の正の向き、北向きを y 軸の正の向きとする座標を考えた。太郎さんはOから東に8m、北に6m進んだ地点Aのベンチまで歩いた。花子さんはOから東に t m、北に $(t - 14)$ m進んだ地点Bの時計台まで歩いた (t は正の実数)。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

太郎「僕の歩いた道と、花子さんの歩いた道、噴水のところでちょうど直角に交わっているように見えるね。」

花子「じゃあ、その条件を使って、私が歩いた距離を求めてみようか。」

- (1) $\overrightarrow{OA} = (8, 6)$ とする。太郎さんの歩いた距離 $|\overrightarrow{OA}|$ を求めると $|\overrightarrow{OA}| =$ アイ である。また $\overrightarrow{OB} = (t, t - 14)$ として、内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を t の式で表すと $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ ウエ $t -$ オカ となる。

太郎さんの歩いた距離 アイ = 10 ウエ 14 オカ 84

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 8 \times t + 6 \times (t - 14) = 8t + 6t - 84 = 14t - 84$$

太郎さんの歩いた距離は10m、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 14t - 84$

- (2) 2人の歩いた道が噴水の位置で直角に交わっている、つまり $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ であることを用いて、 t の値を求めよ。また、そのときの花子さんの歩いた距離 $|\overrightarrow{OB}|$ を求めよ。

$t = \boxed{\text{キ}}$ 、花子さんの歩いた距離は $\boxed{\text{クケ}}$ m である。

キ 6 クケ 10

垂直条件は $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 。(1)の結果を使うと

$$14t - 84 = 0 \text{ より } t = 6$$

このとき $\overrightarrow{OB} = (6, 6 - 14) = (6, -8)$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$t = 6$ 、花子さんの歩いた距離は10m

(3) (2)で求めた t を用いるとき、ベンチAと時計台Bの間の距離 AB を求めると、

$AB = \boxed{\text{コサ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}} \text{ m}$ である。

コサ 10 シ 2

$A(8, 6)$ 、(2)より $B(6, -8)$ 。

$$\overrightarrow{AB} = (6 - 8, -8 - 6) = (-2, -14)$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-14)^2} = \sqrt{4 + 196} = \sqrt{200}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = 10\sqrt{2} \text{ (ルートの中の平方数を外に出す)}$$

$$AB = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

大問2 目標時間 8分/配点 20点

三角形OABにおいて、辺OA上に $\overrightarrow{OC} : \overrightarrow{CA} = 1 : 2$ となる点Cをとり、辺OBの中点をDとする。線分ADと線分BCの交点をPとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ として、あとの問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表すと、 $\overrightarrow{OC} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OD} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \vec{b}$ である。

ア 1 イ 3 ウ 1 エ 2

Cは $\overrightarrow{OC} : \overrightarrow{CA} = 1 : 2$ を満たすので、Oから測ってOA全体の $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ の位置にある。

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

Dは辺OBの midpoint なので $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{b}$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\vec{a}, \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

(2)

Pは線分AD上の点なので、実数 s を用いて $\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{a} + s\overrightarrow{OD}$ と表せる。また、Pは線分BC上の点なので、実数 t を用いて $\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{b} + t\overrightarrow{OC}$ と表せる。 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ の係数をそれぞれ比較して、 s 、 t の値を求めよ。

$$s = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, t = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

カ 4 キ 5 ク 3 ケ 5

(1)の結果を代入して、 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ だけの式に書き直す。

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{a} + s \cdot \frac{1}{2}\vec{b} = (1-s)\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} \cdots (1)$$

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{b} + t \cdot \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{t}{3}\vec{a} + (1-t)\vec{b} \cdots (2)$$

$\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ は一次独立（平行でなく、どちらも $\vec{0}$ でない）なので、(1)と(2)の $\vec{a}$ の係数どうし、 $\vec{b}$ の係数どうしをそれぞれ比較できる。

$$\vec{a} \text{ の係数 : } 1-s = \frac{t}{3} \cdots (3)$$

$$\vec{b} \text{ の係数 : } \frac{s}{2} = 1-t \cdots (4)$$

(3)より $t = 3(1-s) = 3-3s$ 。これを(4)に代入する。

$$\frac{s}{2} = 1 - (3-3s) = -2+3s$$

両辺を2倍して $s = -4+6s$

$$-5s = -4 \text{ より } s = \frac{4}{5}$$

$$t = 3 - 3 \times \frac{4}{5} = 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$$

$$s = \frac{4}{5}, t = \frac{3}{5}$$

(3)

(2)の結果を用いて、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表すと、 $\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \vec{a} + \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \vec{b}$ である。

コ 1 サ 5 シ 2 ス 5

(2)の(1)式に $s = \frac{4}{5}$ を代入する。

$$\overrightarrow{OP} = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \vec{a} + \frac{\frac{4}{5}}{2} \vec{b} = \frac{1}{5} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b}$$

検算として(2)の(2)式にも $t = \frac{3}{5}$ を代入すると

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\frac{3}{5}}{3} \vec{a} + \left(1 - \frac{3}{5}\right) \vec{b} = \frac{1}{5} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b}$$

一致するので正しい。

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{5} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b}$$