

ド・モアブルの定理

問題プリント（全25問）

氏名 _____

得点 _____ / 25点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～6）

1 n=2の計算

$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^2$ の値を求めよ。

実部 虚部

2 n=2の計算

$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^2$ の値を求めよ。

実部 虚部

3 n=4の計算

$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4$ の値を求めよ。

実部 虚部

4 n=4の計算

$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^4$ の値を求めよ。

実部 虚部

5 n=3の計算

$\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^3$ の値を求めよ。

実部 虚部

6 n=6の計算（1周する）

$\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^6$ の値を求めよ。

実部 虚部

標準（7～12） ※まずは $a+bi$ を極形式に直してから計算しよう

7 $(1+i)^2$ を計算せよ。

実部 虚部

8 $(1-i)^4$ を計算せよ。

実部 虚部

9 $(-1+i)^6$ を計算せよ。

実部 虚部

10 $(\sqrt{3}+i)^6$ を計算せよ。

実部 虚部

11 $(\sqrt{3}-i)^3$ を計算せよ。

実部 虚部

12 絶対値・偏角がともに整数比にならない例

$(2+2i)^3$ を計算せよ。

実部 虚部

挑戦 (13~18)

13 n乗根の偏角

方程式 $z^5 = 1$ の解のうち、偏角が正で最小のものの偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を求めよ。 $(\pi$ を用いて分数の形で入力)

$\theta =$

14 解の個数・実数解の個数

方程式 $z^6 = 1$ の解は全部で何個あるか。また、そのうち実数である解は何個あるか。

解の個数 実数解の個数

15 $z^n = \alpha$ の偏角

方程式 $z^4 = -1$ の解のうち、偏角が正で最小のものの偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を求めよ。 $(\pi$ を用いて分数の形で入力)

$\theta =$

16 $z^n = \alpha$ の偏角 (虚数の α)

方程式 $z^3 = 8i$ の解のうち、偏角が最大となるものの偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を求めよ。 $(\pi$ を用いて分数の形で入力)

$\theta =$

17 z^n が実数になる最小の n

$z = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i}$ とするとき、 z^n が実数になる最小の自然数 n を求めよ。

$n =$

18 z^n が実数になる最小の n (分数が約分できない例)

$z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$ とするとき、 z^n が実数になる最小の自然数 n を求めよ。

$n =$

DRILL

応用問題 (プリント限定)

ここから先はPDF限定の腕試し。ド・モアブルの定理の応用に挑戦しよう。

応1 $z + 1/z$ の形と n 乗の和

絶対値1の複素数 z が $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{\pi}{5}$ を満たすとき、 $z^5 + \frac{1}{z^5}$ の値を求めよ。

値

応2 1の n 乗根の和

1の5乗根を偏角の小さい順に $z_0 = 1, z_1, z_2, z_3, z_4$ とする。 $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ の値を求めよ。

値

応3 1の n 乗根の和と積

1の6乗根をすべてかけ合わせた積、およびすべて足し合わせた和を求めよ。

和 積

応4 1の n 乗根と図形の面積

1の6乗根を頂点とする正六角形(半径1の円に内接)の面積を求めよ。

面積

応5 $z^n = \alpha$ (α が虚数) の解法・総合

方程式 $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$ の解のうち、偏角が正で最小のものを極形式 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の形で求めよ。 r と θ をそれぞれ答えよ。

$r =$ $\theta =$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 方程式 $z^n = \alpha$ を解くとき、絶対値の比較からは $\rho = \sqrt[n]{r}$ という1つの値しか出てこないのに対し、偏角の比較では $\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) という n 個の値が出てくる。なぜ偏角の比較には $+2k\pi$ という項が必要になるのか、そしてそれによって解がちょうど n 個に定まる理由を説明せよ。

記2 方程式 $z^3 = -8i$ を解け。解を極形式と直交形式の両方で求め、過程をすべて記述せよ。
