

ド・モアブルの定理

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

n=2の計算

$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^2$ の値を求めよ。

実部 1/2 虚部 $\sqrt{3}/2$

偏角を2倍して $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 。
 $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

実部 $\frac{1}{2}$ 、虚部 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2

n=2の計算

$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^2$ の値を求めよ。

実部 0 虚部 1

偏角を2倍して $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 。
 $\cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1$

実部 0、虚部 1

3

n=4の計算

$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4$ の値を求めよ。

実部 -1/2 虚部 $\sqrt{3}/2$

偏角を4倍して $\frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ 。
 $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

実部 $-\frac{1}{2}$ 、虚部 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4

n=4の計算

$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^4$ の値を求めよ。

実部 -1 虚部 0

偏角を4倍して $\frac{4\pi}{4} = \pi$ 。
 $\cos \pi = -1, \sin \pi = 0$

実部 -1、虚部 0

5

n=3の計算

$\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^3$ の値を求めよ。

実部 0 虚部 -1

偏角を3倍して $\frac{3\pi}{2}$ 。
 $\cos \frac{3\pi}{2} = 0, \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

実部 0、虚部 -1

6

n=6の計算 (1周する)

$\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^6$ の値を求めよ。

実部 1 虚部 0

偏角を6倍して $\frac{6\pi}{3} = 2\pi$ (ちょうど1周)。
 $\cos 2\pi = 1, \sin 2\pi = 0$

実部 1、虚部 0

標準 (7~12) ※まずは $a+bi$ を極形式に直してから計算しよう

7 $(1+i)^2$ を計算せよ。

実部 0 虚部 2

$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
 $(1+i)^2 = (\sqrt{2})^2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 2(0+i)$

実部 0、虚部 2

8 $(1 - i)^4$ を計算せよ。

実部 -4 虚部 0

$$\begin{aligned} 1 - i &= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \\ (1 - i)^4 &= (\sqrt{2})^4 (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = 4(-1 + 0i) \quad (\cos(-\pi) = \cos \pi = -1) \end{aligned}$$

実部 -4、虚部 0

9 $(-1 + i)^6$ を計算せよ。

実部 0 虚部 8

$$\begin{aligned} -1 + i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ (-1 + i)^6 &= (\sqrt{2})^6 \left(\cos \frac{18\pi}{4} + i \sin \frac{18\pi}{4} \right) = 8 \left(\cos \frac{9\pi}{2} + i \sin \frac{9\pi}{2} \right) \\ \frac{9\pi}{2} &= 4\pi + \frac{\pi}{2} \text{ なので } \cos \frac{9\pi}{2} = 0, \sin \frac{9\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$

実部 0、虚部 8

10 $(\sqrt{3} + i)^6$ を計算せよ。

実部 -64 虚部 0

$$\begin{aligned} \sqrt{3} + i &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ (\sqrt{3} + i)^6 &= 2^6 (\cos \pi + i \sin \pi) = 64(-1 + 0i) \end{aligned}$$

実部 -64、虚部 0

11 $(\sqrt{3} - i)^3$ を計算せよ。

実部 0 虚部 -8

$$\begin{aligned}\sqrt{3} - i &= 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \\ (\sqrt{3} - i)^3 &= 2^3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 8(0 - i)\end{aligned}$$

実部 0、虚部 -8

12 絶対値・偏角がともに整数比にならない例

$(2 + 2i)^3$ を計算せよ。

実部 -16 虚部 16

$$\begin{aligned}2 + 2i &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ (2 + 2i)^3 &= (2\sqrt{2})^3 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 16\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ 16\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} &= 16 \text{ なので}\end{aligned}$$

実部 -16、虚部 16

挑戦 (13~16)

13

n乗根の偏角

方程式 $z^5 = 1$ の解のうち、偏角が正で最小のものの偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を求めよ。 (π) を用いて分数の形で入力)

$$\theta = \underline{2\pi/5}$$

解は $\theta = \frac{2k\pi}{5}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)、つまり $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$ 。

$\theta = 0$ は正ではないので除くと、正で最小のものは $k = 1$ のとき。

$$\theta = \frac{2\pi}{5}$$

14

解の個数・実数解の個数

方程式 $z^6 = 1$ の解は全部で何個あるか。また、そのうち実数である解は何個あるか。

解の個数 6 実数解の個数 2

解は $\theta = \frac{k\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) の6個。

実数になるのは虚部 $\sin \theta = 0$ のとき、つまり $\theta = 0$ ($z = 1$) と $\theta = \pi$ ($z = -1$) の2個。

解の個数 6個、実数解の個数 2個 ($z = \pm 1$)

15

 $z^n = \alpha$ の偏角

方程式 $z^4 = -1$ の解のうち、偏角が正で最小のものの偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を求めよ。 (π) を用いて分数の形で入力)

$$\theta = \underline{\pi/4}$$

$-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ なので $4\theta = \pi + 2k\pi$ 、 $\theta = \frac{\pi + 2k\pi}{4}$ ($k = 0, 1, 2, 3$)。

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ の中で正で最小のものは $k = 0$ のとき。

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

16

 $z^n = \alpha$ の偏角 (虚数の α)

方程式 $z^3 = 8i$ の解のうち、偏角が最大となるものの偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を求めよ。 (π) を用いて分数の形で入力)

$$\theta = \underline{3\pi/2}$$

$8i = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ なので $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 、 $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2$)。

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ の中で最大のものは $k = 2$ のとき。

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。ド・モアブルの定理の応用に挑戦しよう。

応1

$z+1/z$ の形とn乗の和

絶対値1の複素数 z が $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \frac{\pi}{5}$ を満たすとき、 $z^5 + \frac{1}{z^5}$ の値を求めよ。

値 -2

$z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおくと、絶対値1なので $\frac{1}{z} = \cos \theta - i \sin \theta$ （共役複素数と一致する）。

$$z + \frac{1}{z} = (\cos \theta + i \sin \theta) + (\cos \theta - i \sin \theta) = 2 \cos \theta$$

条件より $2 \cos \theta = 2 \cos \frac{\pi}{5}$ なので $\theta = \frac{\pi}{5}$ ととれる。

ド・モアブルの定理より $z^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta$ 、また $\frac{1}{z^5} = \left(\frac{1}{z}\right)^5 = \cos 5\theta - i \sin 5\theta$ （同じ理由）なので

$$z^5 + \frac{1}{z^5} = 2 \cos 5\theta = 2 \cos \left(5 \times \frac{\pi}{5}\right) = 2 \cos \pi = 2 \times (-1)$$

$$z^5 + \frac{1}{z^5} = -2$$

応2

1のn乗根の和

1の5乗根を偏角の小さい順に $z_0 = 1, z_1, z_2, z_3, z_4$ とする。 $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ の値を求めよ。

値 0

$z_0, \dots, z_4$ は $z^5 - 1 = 0$ の5つの解であり、
 $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$
 と因数分解できる。 $z^5 - 1 = 0$ は $z^5 + 0z^4 + 0z^3 + 0z^2 + 0z - 1 = 0$ の形なので、解と係数の関係（すべての解の和 $= -(\text{z}^4\text{の係数}) = 0$ ）より、5つの解の和は0。

（別の見方：正五角形の5頂点を表すベクトルは、正五角形の重心が原点にあるのでベクトルの和は $\vec{0}$ になる。）

$$z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$$

応3

1のn乗根の和と積

1の6乗根をすべてかけ合わせた積、およびすべて足し合わせた和を求めよ。

和 0 積 -1

1の6乗根は $z^6 - 1 = 0$ の6つの解。 $z^6 - 1 = z^6 + 0z^5 + \dots + 0z - 1$ の形なので、解と係数の関係より

$$\text{和} = -(z^5\text{の係数}) = 0$$

$$\text{積} = (-1)^6 \times \frac{(\text{定数項})}{(\text{最高次の係数})} = 1 \times \frac{-1}{1} = -1$$

（積は直接、偏角の和で確かめることもできる。6つの解の偏角は $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ で、和は 5π 。積の偏角は $5\pi \pmod{2\pi}$ で π となり、絶対値 $1 \cdot \text{偏角}\pi$ の複素数は -1 。）

和 0、積 -1

応4

1のn乗根と図形の面積

1の6乗根を頂点とする正六角形（半径1の円に内接）の面積を求めよ。

面積 $3\sqrt{3}/2$

正六角形は、中心角 60° ・半径1の二等辺三角形（実は正三角形）6個に分割できる。

1つの三角形の面積は、2辺の長さが1・はさむ角が 60° の三角形の面積の公式 $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ より

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

6個分なので、正六角形の面積は

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

面積 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

応5

$z^n = \alpha$ （ α が虚数）の解法・総合

方程式 $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$ の解のうち、偏角が正で最小のものを極形式 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の形で求めよ。 r と θ をそれぞれ答えよ。

$r =$ 2 $\theta =$ $\pi/6$

まず $-8 + 8\sqrt{3}i$ を極形式に直す。

絶対値： $\sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16$

偏角：実部が負・虚部が正（第2象限）で、 $\tan$ の基準角が $\frac{8\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3} \rightarrow 60^\circ$ 。第2

象限なので $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$

よって $-8 + 8\sqrt{3}i = 16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$

$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと、 $\rho^4 = 16$ より $\rho = 2$ 。

$4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ より $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) : $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}$

このうち正で最小のものは $k = 0$ のとき。

$r = 2, \theta = \frac{\pi}{6}$

