

# 複素数平面

解答（全23問）

氏名 \_\_\_\_\_

得点 \_\_\_\_\_ / 23点

DRILL

## 練習問題（全18問）

### 基本（1～8）

1

絶対値

$z = 3 + 4i$  のとき、 $|z|$  を求めよ。

$|z| =$  5

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$|z| = 5$$

2

絶対値

$z = -5 + 12i$  のとき、 $|z|$  を求めよ。

$|z| =$  13

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169}$$

$$|z| = 13$$

3

絶対値（根号）

$z = 1 - i$  のとき、 $|z|$  を求めよ。

$$|z| = \underline{\sqrt{2}}$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|z| = \sqrt{2}$$

4

偏角（第1象限）

$z = 1 + i$  の偏角  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) を求めよ。

$$\theta = \underline{45}$$

$$a = 1, b = 1 \text{ はともに正なので第1象限。} \tan \theta = \frac{1}{1} = 1$$

$$\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

5

偏角（第2象限）

$z = -1 + \sqrt{3}i$  の偏角  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) を求めよ。

$$\theta = \underline{120}$$

$$a = -1 < 0, b = \sqrt{3} > 0 \text{ なので第2象限。基準角は } \tan(\text{基準角}) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \text{ より } 60^\circ. \text{ 第2象限なので } 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

6

偏角（軸上の点）

$z = -i$  の偏角  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) を求めよ。

$$\theta = \underline{270}$$

$z = -i$  は点  $(0, -1)$ 。虚軸の負の部分にあるので、正の実軸から反時計回りに  $270^\circ$  回った位置。

$$\theta = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$$

7

2点間の距離

$z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 5 - i$  のとき、2点間の距離  $|z_1 - z_2|$  を求めよ。

$$\text{距離} = \underline{5}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (2 - 5) + (3 - (-1))i = -3 + 4i \\ |z_1 - z_2| &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} \end{aligned}$$

距離は 5

8

絶対値

$z = -6 + 8i$  のとき、 $|z|$  を求めよ。

$$|z| = \underline{10}$$

$$|z| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100}$$

$$|z| = 10$$

- 9  $z = \sqrt{3} + i$  を極形式  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  で表すとき、 $r$  と  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) を求めよ。

$$r = \underline{2} \quad \theta = \underline{30}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$a, b \text{ ともに正で第1象限。} \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より } \theta = 30^\circ$$

$$r = 2, \theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

- 10  $z = -2 + 2i$  を極形式で表すとき、 $r$  と  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) を求めよ。

$$r = \underline{2\sqrt{2}} \quad \theta = \underline{135}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$a < 0, b > 0 \text{ で第2象限。基準角は } \tan(\text{基準角}) = \frac{2}{2} = 1 \text{ より } 45^\circ。 \text{ よって } \theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$r = 2\sqrt{2}, \theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$$

- 11  $z = -3 - 3\sqrt{3}i$  を極形式で表すとき、 $r$  と  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) を求めよ。

$$r = \underline{6} \quad \theta = \underline{240}$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

$$a, b \text{ ともに負で第3象限。基準角は } \tan(\text{基準角}) = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \text{ より } 60^\circ。 \text{ よって } \theta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

$$r = 6, \theta = 240^\circ = \frac{4\pi}{3}$$

- 12  $z = 4(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$  を直交形式  $z = a + bi$  で表すとき、 $a$  と  $b$  を求めよ。

$$a = \underline{-2} \quad b = \underline{2\sqrt{3}}$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$b = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$a = -2, b = 2\sqrt{3} \quad (z = -2 + 2\sqrt{3}i)$$

- 13  $z = 6\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$  を直交形式  $z = a + bi$  で表すとき、 $a$  と  $b$  を求めよ。

$$a = \underline{3\sqrt{3}} \quad b = \underline{3}$$

$$\frac{\pi}{6} = 30^\circ, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$a = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$b = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$a = 3\sqrt{3}, b = 3 \quad (z = 3\sqrt{3} + 3i)$$

- 14  $z = 4 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$  を直交形式  $z = a + bi$  で表すとき、 $a$  と  $b$  を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{-2\sqrt{3}}$$

$$\frac{5\pi}{3} = 300^\circ, \cos 300^\circ = \frac{1}{2}, \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$b = 4 \times \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2\sqrt{3}$$

$$a = 2, b = -2\sqrt{3} \quad (z = 2 - 2\sqrt{3}i)$$

### 挑戦 (15~18)

15

積の絶対値・偏角

$z_1 = 2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$ ,  $z_2 = 5(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)$  のとき、 $|z_1 z_2|$  と  $\arg(z_1 z_2)$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) を求めよ。

$$|z_1 z_2| = \underline{10} \quad \arg(z_1 z_2) = \underline{120}$$

積の絶対値は絶対値どうしの積、偏角は偏角どうしの和。

$$|z_1 z_2| = 2 \times 5 = 10$$

$$\arg(z_1 z_2) = 40^\circ + 80^\circ = 120^\circ$$

$$|z_1 z_2| = 10, \arg(z_1 z_2) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$z_1 = 6(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ ,  $z_2 = 3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$  のとき、 $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$  と  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) を求めよ。

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \underline{2} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \underline{120}$$

商の絶対値は絶対値どうしの商、偏角は偏角どうしの差。

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{6}{3} = 2$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 150^\circ - 30^\circ = 120^\circ$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 2, \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = \sqrt{3} + i$  のとき、 $|z_1 z_2|$  と  $\arg(z_1 z_2)$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) を求めよ。(それぞれの絶対値・偏角を先に求めてから計算するとよい)

$$|z_1 z_2| = \underline{2\sqrt{2}} \quad \arg(z_1 z_2) = \underline{75}$$

$$z_1 = 1 + i : |z_1| = \sqrt{2}, \arg z_1 = 45^\circ$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i : |z_2| = \sqrt{3+1} = 2, \arg z_2 = 30^\circ$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(z_1 z_2) = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$$

$$|z_1 z_2| = 2\sqrt{2}, \arg(z_1 z_2) = 75^\circ = \frac{5\pi}{12}$$

$z = 4 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$  のとき、 $|z^2|$  と  $\arg(z^2)$  ( $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ ) を求めよ。

$$|z^2| = \underline{16} \quad \arg(z^2) = \underline{240}$$

$z^2 = z \times z$  なので絶対値は2乗、偏角は2倍。

$$|z^2| = 4^2 = 16$$

$$\arg(z^2) = \frac{2\pi}{3} \times 2 = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$$

$$|z^2| = 16, \arg(z^2) = 240^\circ = \frac{4\pi}{3}$$



## DRILL

### 応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。回転移動や軌跡の図形的意味など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

回転移動

複素数  $z = 4$  が表す点を、原点を中心に  $60^\circ$  回転すると、複素数  $z(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$  が表す点に移る。回転後の点の座標を求めよ。

実部 = 2    虚部 =  $2\sqrt{3}$

複素数の掛け算  $\cos \theta + i \sin \theta$  をかけることは、原点を中心に  $\theta$  だけ回転することにあたる。

$$z(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 4 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

回転後の点は  $(2, 2\sqrt{3})$

## 応2

図形的意味（垂直二等分線）

$|z - 1| = |z - i|$  を満たす点  $z$  の全体は、どのような図形か。方程式（ $y =$  の形）で答えよ。

図形の式：  $y=x$

$|z - 1|$  は点  $z$  から点  $(1, 0)$  までの距離、 $|z - i|$  は点  $z$  から点  $(0, 1)$  までの距離を表す。

この2つの距離が等しい点の集まりは、2点  $(1, 0)$  と  $(0, 1)$  を結ぶ線分の垂直二等分線。

2点の中点は  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 、2点を結ぶ線分の傾きは  $-1$  なので、垂直二等分線の傾きは  $1$ 。

**求める図形は直線  $y = x$**

## 応3

図形的意味（円）

$|z - 2| = 3$  を満たす点  $z$  の全体は円になる。この円の中心の座標と半径を求めよ。

中心=( 2 , 0 ) 半径= 3

$|z - 2|$  は点  $z$  から点  $2$ （座標  $(2, 0)$ ）までの距離を表す。

これが常に  $3$  になる点の集まりは、点  $(2, 0)$  を中心とする半径  $3$  の円。

**中心  $(2, 0)$ 、半径  $3$**

応4

共役複素数の性質

$z = 3 - 4i$  のとき、 $z + \bar{z}$  と  $z\bar{z}$  の値をそれぞれ求めよ。

$$z + \bar{z} = \underline{6} \quad z\bar{z} = \underline{25}$$

$$\bar{z} = 3 + 4i$$

$$z + \bar{z} = (3 - 4i) + (3 + 4i) = 6 \text{ (実部の2倍。虚部が打ち消しあって実数になる)}$$

$$z\bar{z} = (3 - 4i)(3 + 4i) = 3^2 - (4i)^2 = 9 - (-16) = 9 + 16 = 25 \text{ (} z\bar{z} = |z|^2 \text{ に一致する)}$$

$$z + \bar{z} = 6, z\bar{z} = 25$$

応5

回転と距離の不変性

複素数  $z_1 = 2 + 2i$  が表す点を、原点を中心に  $-90^\circ$  (時計回りに  $90^\circ$ ) 回転させた点の座標を求めよ。また、回転後の点と原点との距離を求めよ。

$$\text{実部} = \underline{2} \quad \text{虚部} = \underline{-2} \quad \text{距離} = \underline{2\sqrt{2}}$$

$$-90^\circ \text{ 回転は } \cos(-90^\circ) + i \sin(-90^\circ) = -i \text{ を掛けることにあたる。}$$

$$z_1 \times (-i) = (2 + 2i)(-i) = -2i - 2i^2 = -2i + 2 = 2 - 2i$$

回転しても原点からの距離 (絶対値) は変わらない。

$$|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ (もとの } |z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ と一致)}$$

$$\text{回転後の点は } (2, -2)、\text{原点との距離は } 2\sqrt{2}$$