

媒介変数表示・極座標

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

媒介変数への代入

$x = 2t + 1, y = 3t - 2$ について、 $t = 3$ のときの (x, y) を求めよ。

$x = \underline{7} \quad y = \underline{7}$

$$x = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$y = 3 \times 3 - 2 = 7$$

$$(x, y) = (7, 7)$$

2

円の媒介変数表示

$x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ について、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ のときの (x, y) を求めよ。

$$x = \underline{1/2} \quad y = \underline{\sqrt{3}/2}$$

$$\begin{aligned} x &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ y &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

3

消去して1次式へ（係数を答える）

$x = t$, $y = 2t + 3$ から t を消去すると、 $y = ax + b$ の形になる。 a , b を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{3}$$

$x = t$ より $t = x$ 。これを $y = 2t + 3$ に代入する。

$$y = 2x + 3$$

$$a = 2, b = 3$$

4

媒介変数への代入

$x = t^2$, $y = t + 1$ について、 $t = 1$ のときの (x, y) を求めよ。

$$x = \underline{1} \quad y = \underline{2}$$

$$x = 1^2 = 1$$

$$y = 1 + 1 = 2$$

$$(x, y) = (1, 2)$$

5

極座標→直交座標

極座標 $(r, \theta) = \left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ を直交座標に変換せよ。

$$x = \underline{0} \quad y = \underline{4}$$

$$x = r \cos \theta = 4 \cos \frac{\pi}{2} = 4 \times 0 = 0$$

$$y = r \sin \theta = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4 \times 1 = 4$$

$$(x, y) = (0, 4)$$

6

直交座標→極座標

直交座標 $(x, y) = (3, 3)$ を極座標 (r, θ) ($0 \leq \theta < 2\pi$) に変換せよ。

$$r = \underline{3\sqrt{2}} \quad \theta = \underline{\pi/4}$$

$$r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{3} = 1. \quad x > 0, y > 0 \text{ の第1象限なので } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$(r, \theta) = \left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

標準 (7~12)

7

消去して楕円の式へ (分母を答える)

$x = 3 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ から θ を消去すると $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ の形になる。 a , b を求めよ。

$$a = \underline{9} \quad b = \underline{4}$$

$\cos \theta = \frac{x}{3}$, $\sin \theta = \frac{y}{2}$ 。 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入する。

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a = 9, b = 4$$

8

消去して放物線の式へ (係数を答える)

$x = t + 2$, $y = t^2 - 1$ から t を消去すると $y = x^2 + bx + c$ の形になる。 b , c を求めよ。

$$b = \underline{-4} \quad c = \underline{3}$$

$x = t + 2$ より $t = x - 2$ 。これを $y = t^2 - 1$ に代入する。

$$y = (x - 2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3$$

$$b = -4, c = 3$$

極座標 $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ を直交座標に変換せよ。

$$x = \underline{\sqrt{3}} \quad y = \underline{1}$$

$$x = 2 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$y = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$$

直交座標 $(x, y) = (-1, \sqrt{3})$ を極座標 (r, θ) ($0 \leq \theta < 2\pi$) に変換せよ。

$$r = \underline{2} \quad \theta = \underline{2\pi/3}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}。x < 0, y > 0 \text{ の第2象限なので、基準角 } \frac{\pi}{3} \text{ を使って } \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}。$$

$$(r, \theta) = \left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$$

11

極方程式→円の式（中心・半径を答える）

極方程式 $r = 4 \cos \theta$ は円 $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ を表す。 a （中心の x 座標）と b （半径）を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{2}$$

両辺に r をかける。 $r^2 = 4r \cos \theta$

$$r^2 = x^2 + y^2, r \cos \theta = x \text{ を代入する。} x^2 + y^2 = 4x$$

$$\text{平方完成する。} x^2 - 4x + y^2 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 - 4 + y^2 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4$$

中心 $(2, 0)$ 、半径 2 の円 $(a = 2, b = 2)$

12

極方程式→円の式（中心・半径を答える）

極方程式 $r = 6 \sin \theta$ は円 $x^2 + (y - a)^2 = b^2$ を表す。 a （中心の y 座標）と b （半径）を求めよ。

$$a = \underline{3} \quad b = \underline{3}$$

両辺に r をかける。 $r^2 = 6r \sin \theta$

$$r^2 = x^2 + y^2, r \sin \theta = y \text{ を代入する。} x^2 + y^2 = 6y$$

$$\text{平方完成する。} x^2 + y^2 - 6y = 0 \rightarrow x^2 + (y - 3)^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 9$$

中心 $(0, 3)$ 、半径 3 の円 $(a = 3, b = 3)$

挑戦 (13~16)

13

中心のずれた円の媒介変数表示

$x = 1 + 2 \cos \theta$, $y = -1 + 2 \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) はどんな図形を表すか。中心の座標と半径を求めよ。

中心 $x = \underline{1}$ $y = \underline{-1}$ 半径 $\underline{2}$

$\cos \theta = \frac{x-1}{2}$, $\sin \theta = \frac{y+1}{2}$ 。 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入する。

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

中心 (1, -1)、半径 2 の円

14

楕円上の点 (xが2つ)

$x = 2 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) 上の点で $y = \frac{3}{2}$ となるとき x の値をすべて求めよ。(2つある場合はコンマ区切りで入力)

$x = \underline{\sqrt{3}, -\sqrt{3}}$

$y = 3 \sin \theta = \frac{3}{2}$ より $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 。 $0 \leq \theta < 2\pi$ では $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ 。

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } x = 2 \cos \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6} \text{ のとき } x = 2 \cos \frac{5\pi}{6} = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3}, -\sqrt{3}$$

15

極方程式に代入

極方程式 $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$ について、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときと $\theta = \pi$ のときの r の値をそれぞれ求めよ。

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } r = \underline{2} \quad \theta = \pi \text{ のとき } r = \underline{1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ より } r = \frac{2}{1 - 0} = 2$$

$$\theta = \pi \text{ のとき } \cos \pi = -1 \text{ より } r = \frac{2}{1 - (-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ で } r = 2、\theta = \pi \text{ で } r = 1$$

16

 $r \cos \theta \cdot r \sin \theta$ の正体

極方程式 $r \cos \theta = 5$ と $r \sin \theta = -2$ がそれぞれ表す直線の式を $x =$ 、 $y =$ の形で求めよ。

$$x = \underline{5} \quad y = \underline{-2}$$

変換公式 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ より、 $r \cos \theta$ はそのまま x 、 $r \sin \theta$ はそのまま y に等しい。

$$r \cos \theta = 5 \rightarrow x = 5 \text{ (} y \text{ 軸に平行な直線)}$$

$$r \sin \theta = -2 \rightarrow y = -2 \text{ (} x \text{ 軸に平行な直線)}$$

$$x = 5、y = -2$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。サイクロイドの座標計算や極方程式から直交座標への変換など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

サイクロイド（座標値計算）

半径 a の円が x 軸上を転がるとき、円周上の1点 P が描く曲線をサイクロイドといい、 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ と媒介変数表示できる。 $a = 2$ のとき、 $t = \frac{\pi}{2}$ における P の座標を求めよ。

$$x = \underline{\pi - 2} \quad y = \underline{2}$$

$$x = a(t - \sin t) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi - 2$$

$$y = a(1 - \cos t) = 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} \right) = 2(1 - 0) = 2$$

$$(x, y) = (\pi - 2, 2)$$

応2

サイクロイド（弧の頂点）

サイクロイド $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ について、 $a = 1$ のとき $t = \pi$ における点の座標を求めよ。これはアーチのいちばん高い点にあたる。

$$x = \underline{\pi} \quad y = \underline{2}$$

$$x = 1 \times (\pi - \sin \pi) = \pi - 0 = \pi$$

$$y = 1 \times (1 - \cos \pi) = 1 - (-1) = 2$$

高さ y の最大値は $2a$ で、ちょうど $t = \pi$ のときに実現する（ $a = 1$ なので高さ2）。

$$(x, y) = (\pi, 2)$$

応3

極方程式→円の式（中心・半径）

極方程式 $r = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta$ はどんな図形を表すか。中心の座標と半径を求めよ。

$$\text{中心 } x = \underline{1} \quad y = \underline{1} \quad \text{半径 } \underline{\sqrt{2}}$$

$$\text{両辺に } r \text{ をかける。 } r^2 = 2r \cos \theta + 2r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2, r \cos \theta = x, r \sin \theta = y \text{ を代入する。}$$

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

x, y それぞれ平方完成する。

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$$

$$(x - 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

中心 $(1, 1)$ 、半径 $\sqrt{2}$ の円

極方程式 $r = \frac{3}{2 - \cos \theta}$ について、 $\theta = 0$ のときと $\theta = \pi$ のときの r の値をそれぞれ求めよ。また、直交座標に変換すると楕円の方程式になることを確かめよ。

$\theta = 0$ のとき $r = \underline{3}$ $\theta = \pi$ のとき $r = \underline{1}$

$$\theta = 0 \text{ のとき } \cos 0 = 1 \text{ より } r = \frac{3}{2 - 1} = 3$$

$$\theta = \pi \text{ のとき } \cos \pi = -1 \text{ より } r = \frac{3}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

直交座標への変換： $r(2 - \cos \theta) = 3$ の両辺を展開する。

$$2r - r \cos \theta = 3$$

$r \cos \theta = x$ を使って r だけ残す。

$$2r = 3 + x \rightarrow r = \frac{3 + x}{2}$$

両辺を2乗して $r^2 = x^2 + y^2$ を代入する。

$$r^2 = \frac{(3 + x)^2}{4} = x^2 + y^2$$

$$(3 + x)^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$9 + 6x + x^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$3x^2 - 6x + 4y^2 = 9$$

x について平方完成する。

$$3(x^2 - 2x) + 4y^2 = 9 \rightarrow 3(x - 1)^2 - 3 + 4y^2 = 9 \rightarrow 3(x - 1)^2 + 4y^2 = 12$$

両辺を12で割る。

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ (中心 } (1, 0) \text{ の楕円)。} \theta = 0 \text{ で } r = 3、\theta = \pi \text{ で } r = 1$$

楕円の媒介変数表示 $x = 4 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) 上の点 P と原点 O との距離 OP が最大になるときの θ の値をすべて求め (2つ)、そのときの OP の長さを求めよ。

$$\theta = \underline{0, \pi} \quad OP = \underline{4}$$

$$OP^2 = x^2 + y^2 = (4 \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta)^2 = 16 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta$$

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ を使って $\cos \theta$ だけの式にする。

$$OP^2 = 16 \cos^2 \theta + 4(1 - \cos^2 \theta) = 12 \cos^2 \theta + 4$$

$\cos^2 \theta$ は 0 以上 1 以下なので、 OP^2 が最大になるのは $\cos^2 \theta = 1$ 、つまり $\cos \theta = \pm 1$ のとき。 $0 \leq \theta < 2\pi$ では $\theta = 0$ または $\theta = \pi$ 。

このとき $OP^2 = 12 \times 1 + 4 = 16$ 、 $OP = 4$ (実際 $\theta = 0$ は点 $(4, 0)$ 、 $\theta = \pi$ は点 $(-4, 0)$ で、どちらも原点からの距離は 4)。

$\theta = 0, \pi$ のとき最大値 $OP = 4$