

2次曲線（放物線・楕円・双曲線）

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～8）

1

放物線 $y^2 = 4px$ （右開き）

$y^2 = 8x$ の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。

焦点 $x = \underline{2}$ $y = \underline{0}$ 準線 $x = \underline{-2}$

$4p = 8$ より $p = 2$ 。

焦点 $(2, 0)$ 、準線 $x = -2$

2

放物線 $y^2 = 4px$ （左開き）

$y^2 = -20x$ の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。

焦点 $x = \underline{-5}$ $y = \underline{0}$ 準線 $x = \underline{5}$

$4p = -20$ より $p = -5$ 。

焦点 $(-5, 0)$ 、準線 $x = 5$

3

放物線 $x^2 = 4py$ (上開き) $x^2 = 16y$ の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。焦点 $x = \underline{0}$ $y = \underline{4}$ 準線 $y = \underline{-4}$ $4p = 16$ より $p = 4$ 。焦点 $(0, 4)$ 、準線 $y = -4$

4

放物線 $x^2 = 4py$ (下開き) $x^2 = -4y$ の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。焦点 $x = \underline{0}$ $y = \underline{-1}$ 準線 $y = \underline{1}$ $4p = -4$ より $p = -1$ 。焦点 $(0, -1)$ 、準線 $y = 1$

5

楕円 (焦点は x 軸上) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ の焦点の座標と長軸の長さを求めよ。焦点の x 座標 (コンマ区切り) $\underline{4,-4}$ $y = \underline{0}$ 長軸の長さ $\underline{10}$ $a = 5, b = 3$ 。 $a > b$ なので焦点は x 軸上。 $c^2 = 25 - 9 = 16$ より $c = 4$ 。 長軸の長さは $2a = 10$ 。焦点 $(4, 0)$ 、 $(-4, 0)$ 。長軸の長さ 10

6

楕円（焦点は y 軸上）

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ の焦点の座標と長軸の長さを求めよ。

焦点 $x = \underline{0}$ 焦点の y 座標（コンマ区切り） $\underline{4,-4}$ 長軸の長さ $\underline{10}$

分母は y^2 の方が大きい ($25 > 9$) ので焦点は y 軸上。 $a = 5$, $b = 3$, $c^2 = 25 - 9 = 16$ より $c = 4$ 。長軸の長さは $2a = 10$ 。

焦点 $(0, 4)$ 、 $(0, -4)$ 。長軸の長さ 10

7

双曲線（焦点は x 軸上）

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ の焦点の座標と漸近線の傾きを求めよ。

焦点の x 座標（コンマ区切り） $\underline{5,-5}$ $y = \underline{0}$ 漸近線の傾き（正の方） $\underline{3/4}$

$a = 4$, $b = 3$ 。 $c^2 = 16 + 9 = 25$ より $c = 5$ 。漸近線の傾きは $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{3}{4}$ 。

焦点 $(5, 0)$ 、 $(-5, 0)$ 。漸近線 $y = \pm \frac{3}{4}x$

8

双曲線（焦点は y 軸上）

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ の焦点の座標と漸近線の傾きを求めよ。

焦点 $x = \underline{0}$ 焦点の y 座標（コンマ区切り） $\underline{5,-5}$ 漸近線の傾き（正の方）
 $\underline{3/4}$

正の項が y^2 なので上下に開く双曲線。 $a = 3$, $b = 4$, $c^2 = 9 + 16 = 25$ より $c = 5$ 。漸近線の傾きは $\pm \frac{a}{b} = \pm \frac{3}{4}$ 。

焦点 $(0, 5)$ 、 $(0, -5)$ 。漸近線 $y = \pm \frac{3}{4}x$

- 9 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ の焦点の座標と長軸の長さを求めよ。

焦点の x 座標 (コンマ区切り) 12,-12 $y =$ 0 長軸の長さ 26

$a = 13, b = 5$ 。 $c^2 = 169 - 25 = 144$ より $c = 12$ 。長軸の長さは $2a = 26$ 。

焦点 (12, 0)、(-12, 0)。長軸の長さ 26

- 10 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$ の焦点の座標と長軸の長さを求めよ。

焦点 $x =$ 0 焦点の y 座標 (コンマ区切り) 3,-3 長軸の長さ $2\sqrt{13}$

分母は y^2 の方が大きい ($13 > 4$) ので焦点は y 軸上。 $a = \sqrt{13}, b = 2, c^2 = 13 - 4 = 9$ より $c = 3$ 。長軸の長さは $2a = 2\sqrt{13}$ 。

焦点 (0, 3)、(0, -3)。長軸の長さ $2\sqrt{13}$

- 11 $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{225} = 1$ の焦点の座標と漸近線の傾きを求めよ。

焦点の x 座標 (コンマ区切り) 17,-17 $y =$ 0 漸近線の傾き (正の方)
 $15/8$

$a = 8, b = 15$ 。 $c^2 = 64 + 225 = 289$ より $c = 17$ 。漸近線の傾きは $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{15}{8}$ 。

焦点 (17, 0)、(-17, 0)。漸近線 $y = \pm \frac{15}{8}x$

12 $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$ の焦点の座標と漸近線の傾きを求めよ。

焦点 $x = \underline{0}$ 焦点の y 座標（コンマ区切り） 13,-13 漸近線の傾き（正の方）
5/12

正の項が y^2 なので上下に開く双曲線。 $a = 5$, $b = 12$, $c^2 = 25 + 144 = 169$ より $c = 13$ 。漸近線の傾きは $\pm \frac{a}{b} = \pm \frac{5}{12}$ 。

焦点 $(0, 13)$, $(0, -13)$ 。漸近線 $y = \pm \frac{5}{12}x$

13 条件から式を逆算（楕円）

焦点が $(3, 0)$, $(-3, 0)$ で、長軸の長さが 10 である楕円について、標準形 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の a , b の値を求めよ。

$a = \underline{5}$ $b = \underline{4}$

長軸の長さ $2a = 10$ より $a = 5$ 。焦点の座標から $c = 3$ 。
 $c^2 = a^2 - b^2$ より $9 = 25 - b^2$ 、よって $b^2 = 16$, $b = 4$ 。

$a = 5, b = 4$

14 条件から式を逆算（双曲線）

焦点が $(25, 0)$, $(-25, 0)$ で、漸近線の傾きが $\pm \frac{3}{4}$ である双曲線について、標準形 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の a , b の値を求めよ。

$a = \underline{20}$ $b = \underline{15}$

漸近線の傾きが $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ なので、 $a = 4k$, $b = 3k$ ($k > 0$) とおける。
 $c^2 = a^2 + b^2$ より $25^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 16k^2 + 9k^2 = 25k^2$ 、よって $k^2 = 25$, $k = 5$ 。

$a = 20, b = 15$

15

条件から式を逆算（放物線）

頂点が原点、準線が $x = 3$ である放物線の焦点の座標と p の値を求めよ。

$$p = \underline{-3} \quad \text{焦点 } x = \underline{-3} \quad y = \underline{0}$$

準線は $x = -p$ なので $-p = 3$ 、よって $p = -3$ ($p < 0$ なので左に開く放物線)。
焦点は $(p, 0) = (-3, 0)$ 。

$$p = -3. \text{ 焦点 } (-3, 0)$$

挑戦 (16~18)

16

条件から式を逆算・2段階

ある双曲線の2つの焦点は $F(10, 0)$ 、 $F'(-10, 0)$ であり、漸近線の傾きは $\pm \frac{3}{4}$ である。この双曲線の標準形 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ における a 、 b の値を求めよ。

$$a = \underline{8} \quad b = \underline{6}$$

漸近線の傾き $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ より $a = 4k$ 、 $b = 3k$ ($k > 0$) とおく。

焦点の座標から $c = 10$ 。 $c^2 = a^2 + b^2$ より $100 = 16k^2 + 9k^2 = 25k^2$ 、よって $k^2 = 4$ 、 $k = 2$ 。

$$a = 8, b = 6$$

17

焦点までの距離＝準線までの距離

放物線 $y^2 = 4x$ 上の点 P について、焦点 F までの距離が 5 であるとき、 P の x 座標を求めよ。

$$x = \underline{4}$$

$4p = 4$ より $p = 1$ 。焦点は $(1, 0)$ 、準線は $x = -1$ 。

放物線の定義より、点 $P(x, y)$ について「焦点までの距離」＝「準線までの距離」
 $= x - (-1) = x + 1$ 。

これが 5 に等しいので $x + 1 = 5$ 、よって $x = 4$ 。

$$x = 4$$

18

距離の差の定義に戻る

双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上の点 P について、2つの焦点 F, F' までの距離の差 $|PF - PF'|$ を求めよ。

$$|PF - PF'| = \underline{6}$$

双曲線の定義そのもの：2焦点までの距離の差の絶対値は、曲線上のどの点でも $2a$ で一定。

$a^2 = 9$ より $a = 3$ 、よって $2a = 6$ 。

$$|PF - PF'| = 6$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。平行移動した曲線・離心率・軌跡の導出に挑戦しよう。

応1

平行移動した放物線

放物線 $(y - 2)^2 = 8(x - 1)$ の頂点・焦点の座標と、準線の方程式を求めよ。

頂点 $x = \underline{1}$ $y = \underline{2}$ 焦点 $x = \underline{3}$ $y = \underline{2}$ 準線 $x = \underline{-1}$

$x' = x - 1, y' = y - 2$ とおくと $y'^2 = 8x'$ 。原点を頂点とする放物線と同じ形なので、 $4p = 8$ より $p = 2$ 。

この放物線は「頂点を $(1, 2)$ に平行移動しただけ」なので、頂点・焦点・準線もすべて同じだけ平行移動する。

基準形での焦点は $(p, 0) = (2, 0)$ 、準線は $x' = -p = -2$ 。

頂点 $(1, 2)$ 。焦点 $(3, 2)$ ($= (1 + 2, 2)$)。準線 $x = -1$ ($= 1 - 2$)

応2

平行移動した楕円

楕円 $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ の中心と、2つの焦点の座標を求めよ。

中心 $x = \underline{2}$ $y = \underline{-1}$ 焦点の x 座標（コンマ区切り） $\underline{6,-2}$ 焦点の y 座標 $\underline{-1}$

$x' = x - 2, y' = y + 1$ とおくと $\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{9} = 1$ （中心が原点の楕円と同じ形）。中心は $x' = 0, y' = 0$ すなわち $(x, y) = (2, -1)$ 。

$a = 5, b = 3$ で $a > b$ なので焦点は中心を通り x 軸に平行な直線上。 $c^2 = 25 - 9 = 16$ より $c = 4$ 。

基準形での焦点は $(\pm 4, 0)$ 。これを中心 $(2, -1)$ だけ平行移動すると $(2 + 4, -1) = (6, -1)$ 、 $(2 - 4, -1) = (-2, -1)$ 。

中心 $(2, -1)$ 。焦点 $(6, -1)$ 、 $(-2, -1)$

応3

平行移動した双曲線

双曲線 $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ の中心・2つの焦点の座標と、漸近線の傾きを求めよ。

中心 $x = \underline{-3}$ $y = \underline{2}$ 焦点の x 座標（コンマ区切り） $\underline{2,-8}$ 焦点の y 座標 $\underline{2}$ 漸近線の傾き（正の方） $\underline{3/4}$

$x' = x + 3, y' = y - 2$ とおくと $\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{9} = 1$ 。中心は $x' = 0, y' = 0$ すなわち $(x, y) = (-3, 2)$ 。

$a = 4, b = 3, c^2 = 16 + 9 = 25$ より $c = 5$ 。基準形での焦点は $(\pm 5, 0)$ 、漸近線の傾きは $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{3}{4}$ （漸近線の傾きは平行移動しても変わらない）。

焦点を中心 $(-3, 2)$ だけ平行移動すると $(-3 + 5, 2) = (2, 2)$ 、 $(-3 - 5, 2) = (-8, 2)$ 。

中心 $(-3, 2)$ 。焦点 $(2, 2)$ 、 $(-8, 2)$ 。漸近線の傾き $\pm \frac{3}{4}$

応4

離心率の入り口

曲線の「丸さ・とがり具合」は離心率 $e = \frac{c}{a}$ という数値でも表せる ($0 < e < 1$ なら楕円、 $e = 1$ なら放物線、 $e > 1$ なら双曲線になることが知られている)。次の2つの曲線の離心率を求めよ。

(1) 楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (2) 双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

(1) $e = \underline{\underline{3/5}}$ (2) $e = \underline{\underline{5/3}}$

(1) $a = 5, b = 4$ 。 $c^2 = 25 - 16 = 9$ より $c = 3$ 。 $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6$ ($0 < e < 1$ で確かに楕円)。

(2) $a = 3, b = 4$ 。 $c^2 = 9 + 16 = 25$ より $c = 5$ 。 $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ ($e > 1$ で確かに双曲線)。

離心率は「円らしさ」の指標で、楕円は1未満、双曲線は必ず1より大きくなる。この値をどう使い分けるかは、次のページ（媒介変数表示・極座標）でさらにくわしく扱う。

(1) $e = \frac{3}{5}$ (2) $e = \frac{5}{3}$

応5

軌跡としての導出

2定点 $F(3, 0)$ 、 $F'(-3, 0)$ からの距離の和が 10 であるような点 P の軌跡は、標準形 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の楕円になる。この a^2, b^2 の値を求めよ。

$a^2 = \underline{\underline{25}}$ $b^2 = \underline{\underline{16}}$

「2定点からの距離の和が一定」は、まさに楕円の定義（STEP2参照）。距離の和が $2a$ にあたるので $2a = 10$ 、よって $a = 5$ 、 $a^2 = 25$ 。

2定点 F, F' は焦点にあたるので $c = 3$ 。楕円では $c^2 = a^2 - b^2$ なので $9 = 25 - b^2$ 、よって $b^2 = 16$ 。

$a^2 = 25, b^2 = 16$ (軌跡の方程式は $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$)

