

平面上の曲線と複素数平面 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

放物線（焦点・準線）

$y^2 = 12x$ の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。

焦点 $x = \underline{3}$ $y = \underline{0}$ 準線 $x = \underline{-3}$

$4p = 12$ より $p = 3$ 。

焦点 $(3, 0)$ 、準線 $x = -3$

2

楕円（焦点・長軸）

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ の焦点の座標と長軸の長さを求めよ。

焦点の x 座標（コンマ区切り） 8,-8 $y =$ 0 長軸の長さ 20

$a = 10, b = 6$ 。 $a > b$ なので焦点は x 軸上。 $c^2 = 100 - 36 = 64$ より $c = 8$ 。 長軸の長さは $2a = 20$ 。

焦点 $(8, 0)$ 、 $(-8, 0)$ 。長軸の長さ 20

3

双曲線（焦点・漸近線）

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ の焦点の座標と漸近線の傾き（正の方）を求めよ。

焦点の x 座標（コンマ区切り） 4,-4 $y =$ 0 漸近線の傾き $\sqrt{3}$

$a = 2, b = 2\sqrt{3}$ 。 $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16$ より $c = 4$ 。 漸近線の傾きは $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} = \pm \sqrt{3}$ 。

焦点 $(4, 0)$ 、 $(-4, 0)$ 。漸近線 $y = \pm \sqrt{3}x$

4

媒介変数への代入

$x = 3t - 1, y = t^2 + 2$ について、 $t = 2$ のときの (x, y) を求めよ。

$x =$ 5 $y =$ 6

$$x = 3 \times 2 - 1 = 5$$

$$y = 2^2 + 2 = 6$$

$$(x, y) = (5, 6)$$

5

媒介変数の消去 (1次式)

$x = 2t - 3$, $y = 4t + 1$ から t を消去すると $y = ax + b$ の形になる。 a , b を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{7}$$

$x = 2t - 3$ より $t = \frac{x+3}{2}$ 。これを $y = 4t + 1$ に代入する。

$$y = 4 \times \frac{x+3}{2} + 1 = 2(x+3) + 1 = 2x + 7$$

$$a = 2, b = 7$$

6

極座標→直交座標

極座標 $(r, \theta) = \left(6, \frac{\pi}{3}\right)$ を直交座標に変換せよ。

$$x = \underline{3} \quad y = \underline{3\sqrt{3}}$$

$$x = r \cos \theta = 6 \cos \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$y = r \sin \theta = 6 \sin \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$(x, y) = (3, 3\sqrt{3})$$

直交座標 $(x, y) = (-3, 3\sqrt{3})$ を極座標 (r, θ) ($0 \leq \theta < 2\pi$) に変換せよ。

$$r = \underline{6} \quad \theta = \underline{120}$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$$

$$\tan \theta = \frac{3\sqrt{3}}{-3} = -\sqrt{3}。x < 0, y > 0 \text{ の第2象限なので、基準角 } \frac{\pi}{3} \text{ を使って } \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}。$$

$$(r, \theta) = \left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$$

極方程式 $r = 6 \cos \theta$ は円 $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ を表す。 a (中心の x 座標) と b (半径) を求めよ。

$$a = \underline{3} \quad b = \underline{3}$$

$$\text{両辺に } r \text{ をかける。 } r^2 = 6r \cos \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2, r \cos \theta = x \text{ を代入する。 } x^2 + y^2 = 6x$$

$$\text{平方完成する。 } x^2 - 6x + y^2 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 - 9 + y^2 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 9$$

$$\text{中心 } (3, 0)、\text{半径 } 3 \text{ の円 } (a = 3, b = 3)$$

9

複素数の絶対値

$z = 5 + 12i$ のとき、 $|z|$ を求めよ。

$$|z| = \underline{13}$$

$$|z| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169}$$

$$|z| = 13$$

10

複素数の絶対値

$z = -8 + 6i$ のとき、 $|z|$ を求めよ。

$$|z| = \underline{10}$$

$$|z| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100}$$

$$|z| = 10$$

11

複素数の偏角

$z = -\sqrt{3} + i$ の偏角 θ ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) を求めよ。

$$\theta = \underline{150}$$

$a = -\sqrt{3} < 0$, $b = 1 > 0$ なので第2象限。基準角は $\tan(\text{基準角}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ より 30° 。第2象限なので $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

$$\theta = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$$

12

極形式→直交形式

$z = 6(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ を直交形式 $z = a + bi$ で表すとき、 a と b を求めよ。

$$a = \underline{-3\sqrt{3}} \quad b = \underline{3}$$

$$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$$

$$a = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$$

$$b = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$a = -3\sqrt{3}, b = 3 \quad (z = -3\sqrt{3} + 3i)$$

13

ド・モアブルの定理 (n=3)

$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^3$ の値を求めよ。

$$\text{実部 } \underline{-\sqrt{2}/2} \quad \text{虚部 } \underline{\sqrt{2}/2}$$

偏角を3倍して $\frac{3\pi}{4}$ 。

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{実部 } -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{虚部 } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

14

ド・モアブルの定理 ($n=4$ ・ちょうど1周)

$\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^4$ の値を求めよ。

実部 1 虚部 0

偏角を4倍して $\frac{4\pi}{2} = 2\pi$ (ちょうど1周)。

$$\cos 2\pi = 1, \sin 2\pi = 0$$

実部 1、虚部 0

15

複素数の累乗 (直接展開)

$(1 - i)^2$ を計算せよ。

実部 0 虚部 -2

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

実部 0、虚部 -2

発展 (16~25)

16

楕円 (条件から式を逆算)

焦点が $(0, 5)$ 、 $(0, -5)$ で、長軸の長さが **26** である楕円について、標準形

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (焦点が y 軸上) の a , b の値を求めよ。

$a =$ 13 $b =$ 12

長軸の長さ $2a = 26$ より $a = 13$ 。焦点の座標から $c = 5$ 。

$c^2 = a^2 - b^2$ より $25 = 169 - b^2$ 、よって $b^2 = 144$, $b = 12$ 。

$a = 13, b = 12$

$x = \frac{5}{\cos \theta}$, $y = 3 \tan \theta$ から θ を消去すると $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ の形になる。 a , b を求めよ。

$$a = \underline{\underline{25}} \quad b = \underline{\underline{9}}$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{x}{5}, \quad \tan \theta = \frac{y}{3} \text{ とおける。}$$

三角関数の関係式 $\frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta = 1$ に代入する。

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad (a = 25, b = 9)$$

双曲線 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ と直線 $y = 2x + 1$ の共有点の個数を求めよ。

共有点の個数 = 0

直線の式を双曲線の式に代入する。両辺を36倍して分母を払う。

$$4x^2 - 9(2x + 1)^2 = 36$$

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \text{ なので}$$

$$4x^2 - 9(4x^2 + 4x + 1) = 36$$

$$4x^2 - 36x^2 - 36x - 9 = 36$$

$$-32x^2 - 36x - 45 = 0$$

$$32x^2 + 36x + 45 = 0$$

判別式 $D = 36^2 - 4 \times 32 \times 45 = 1296 - 5760 = -4464 < 0$ 。よって共有点は0個。

共有点の個数は 0 個

2次曲線の方程式 $x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 4 = 0$ を平方完成して標準形に直し、中心の座標と a^2 , b^2 の値を求めよ。

中心 $x = \underline{2}$ $y = \underline{-1}$ $a^2 = \underline{9}$ $b^2 = \underline{1}$

x の項と y の項をそれぞれ平方完成する。

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$$

$$9y^2 + 18y = 9(y^2 + 2y) = 9\{(y + 1)^2 - 1\} = 9(y + 1)^2 - 9$$

もとの式に戻す。

$$(x - 2)^2 - 4 + 9(y + 1)^2 - 9 + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 9$$

両辺を9で割ると標準形になる。

$$\frac{(x - 2)^2}{9} + (y + 1)^2 = 1$$

中心 $(2, -1)$ 。 $a^2 = 9$, $b^2 = 1$

極方程式 $r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = 4$ が表す直線の方程式は $x + \sqrt{3}y = c$ の形になる。
 c を求めよ。

$$c = \underline{\quad 8 \quad}$$

$$x \cos \frac{\pi}{3} + y \sin \frac{\pi}{3} = 4$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ を代入する。}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 4$$

両辺を2倍して整理する。

$$x + \sqrt{3}y = 8$$

極方程式 $r = 8 \sin \theta - 6 \cos \theta$ はどんな図形を表すか。中心の座標と半径を求めよ。

中心 $x = \underline{-3}$ $y = \underline{4}$ 半径 $\underline{5}$

両辺に r をかける。 $r^2 = 8r \sin \theta - 6r \cos \theta$

$r^2 = x^2 + y^2$, $r \sin \theta = y$, $r \cos \theta = x$ を代入する。

$$x^2 + y^2 = 8y - 6x$$

右辺を左辺に移項して、 x , y それぞれ平方完成する。

$$x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0$$

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 = 0$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

中心 $(-3, 4)$ 、半径 5 の円

$z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ のとき、 $|z_1 z_2|$ と $\arg(z_1 z_2)$ ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) を求めよ。(それぞれの絶対値・偏角を先に求めてから計算するとよい)

$$|z_1 z_2| = \underline{4\sqrt{2}} \quad \arg(z_1 z_2) = \underline{105}$$

$z_1 = 2 - 2i$: $|z_1| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ 。 $a > 0$, $b < 0$ の第4象限で、基準角 45° より $\arg z_1 = -45^\circ$ (315°)。

$z_2 = -\sqrt{3} + i$: $|z_2| = \sqrt{3 + 1} = 2$ 。 $a < 0$, $b > 0$ の第2象限で、基準角 30° より $\arg z_2 = 150^\circ$ 。

$$|z_1 z_2| = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$$

$$\arg(z_1 z_2) = -45^\circ + 150^\circ = 105^\circ$$

$$|z_1 z_2| = 4\sqrt{2}, \arg(z_1 z_2) = 105^\circ = \frac{7\pi}{12}$$

23

z/wが純虚数になる条件

$z = 2 + ti$ (t は実数の定数)、 $w = 3 - i$ のとき、 $\frac{z}{w}$ が純虚数となるような t の値を求めよ。

$$t = \underline{6}$$

分母の共役 $3 + i$ を分子・分母にかけて実数化する。

$$\frac{z}{w} = \frac{2 + ti}{3 - i} = \frac{(2 + ti)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{6 + 2i + 3ti + ti^2}{9 + 1} = \frac{(6 - t) + (2 + 3t)i}{10}$$

純虚数になるのは実部が 0 かつ虚部が 0 でないとき。

$$6 - t = 0 \rightarrow t = 6$$

(検算： $t = 6$ のとき虚部は $\frac{2 + 18}{10} = 2 \neq 0$ なので条件を満たす。)

$$t = 6$$

24

1のn乗根の偏角

方程式 $z^6 = 64$ の解のうち、偏角が正で最小のものの偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を求めよ。 (π) を用いて分数の形で入力)

$$\theta = \underline{\pi/3}$$

$64 = 64(\cos 0 + i \sin 0)$ 。 $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと $\rho^6 = 64$ より $\rho = 2$ 。

$6\theta = 0 + 2k\pi$ より $\theta = \frac{k\pi}{3}$ ($k = 0, 1, \dots, 5$) : $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 。

$\theta = 0$ は正ではないので除くと、正で最小のものは $k = 1$ のとき。

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$z = \frac{4}{\sqrt{3} + i}$ とするとき、 z^n が実数になる最小の自然数 n を求めよ。

$$n = \underline{6}$$

まず z を1つの複素数に整理する。分母の共役 $\sqrt{3} - i$ を分子・分母にかける。

$$z = \frac{4}{\sqrt{3} + i} = \frac{4(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{4(\sqrt{3} - i)}{3 + 1} = \frac{4(\sqrt{3} - i)}{4} = \sqrt{3} - i$$

極形式に直す。 $|z| = \sqrt{3 + 1} = 2$ 。 $a = \sqrt{3} > 0$, $b = -1 < 0$ の第4象限で、基準角 30° より $\arg z = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}$ ($p = -1$, $q = 6$)。

ド・モアブルの定理より $z^n = 2^n \left(\cos \left(-\frac{n\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{n\pi}{6} \right) \right)$ 。これが実数になるのは $\frac{n\pi}{6}$ が π の整数倍、つまり n が6の倍数のとき。最小の自然数は $n = 6$ 。

(検算: $z^6 = (\sqrt{3} - i)^6$ 。 $\sqrt{3} - i = 2(\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ))$ より $z^6 = 2^6(\cos(-180^\circ) + i \sin(-180^\circ)) = 64 \times (-1) = -64$ 。確かに実数。)

最小の自然数 $n = 6$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

この章では、2次曲線（放物線・楕円・双曲線）を「焦点までの距離」という条件で定義する一方、複素数平面では複素数の積を「回転と拡大」という操作として理解した。一見まったく別々に見えるこの2つの内容には、「式の性質を図形的に読み取る」という共通の姿勢が流れている。それぞれから具体例を1つずつ挙げながら、この共通する姿勢について説明せよ。

2次曲線の側から例を挙げる。双曲線の標準形で $c^2 = a^2 + b^2$ （焦点までの距離の差の絶対値が $2a$ で、焦点間の距離が $2c$ ）となるのは、双曲線上の点と2つの焦点でできる三角形において、2辺の差は残り1辺より必ず小さいという性質（三角形の成立条件）から、 $2c > 2a$ 、すなわち $c > a$ が図形的に導かれるからである。この式は単なる計算規則ではなく、「双曲線上のどんな点をとっても、焦点との距離関係にはこの図形的な制約が必ず及ぶ」という事実の表れになっている。

複素数平面の側から例を挙げる。極形式で表した複素数の積で、絶対値が $r_1 r_2$ （積）、偏角が $\theta_1 + \theta_2$ （和）になるのも、同じように図形的な操作の分解として理解できる。 z_1 に z_2 をかけるという計算は、図形的には「 z_1 を原点中心に θ_2 だけ回転させ、さらに r_2 倍に拡大・縮小する」という1つの変換であり、回転は距離を変えず角度だけを、拡大・縮小は角度を変えず距離だけを変える。この性質の違いがそのまま「絶対値は積、偏角は和」という別々の演算に対応している。

この2つの例に共通するのは、どちらも「式の形だけを覚える」のではなく、「その式がどんな図形的な事実を表しているか」を先に理解しているという点である。双曲線の $c^2 = a^2 + b^2$ は三角形の成立条件という図形的事実の表れであり、複素数の積の規則は回転と拡大という図形的操作の表れである。この章全体を通じて、式と図形を行き来しながら考える姿勢を身につけることが、公式を丸暗記するよりもずっと強い理解につながる。

双曲線の $c^2 = a^2 + b^2$ は焦点との三角形の成立条件という図形的事実の表れであり、複素数の積で絶対値が積・偏角が和になるのは回転と拡大という図形的操作の表れである。この章は一貫して、式の形をそのまま覚えるのではなく、式が表す図形的な意味を先に理解するという姿勢を学ぶ章になっている。

記2 複素数 z が、2点 $A(3)$ 、 $B(-3)$ までの距離の和 $|z - 3| + |z + 3| = 10$ を満たすとき、点 z が描く図形は2次曲線のどれになるか。標準形の方程式と焦点の座標を求めよ。またこの問題が、複素数の絶対値をどのように読み替えることで、第1節で学んだ曲線の定義に結びつくのかを説明せよ。

まず式の意味を読み替える。複素数の絶対値 $|z - \alpha|$ は、複素数平面上で「点 z から点 α までの距離」を表す。したがって $|z - 3|$ は点 z から点 $A(3)$ までの距離、 $|z + 3| = |z - (-3)|$ は点 z から点 $B(-3)$ までの距離を表している。

つまり条件 $|z - 3| + |z + 3| = 10$ は、「2定点 A, B までの距離の和が 10 で一定である」という意味になる。これはまさに第1節で学んだ楕円の定義（2つの焦点までの距離の和が一定）そのものであり、点 z が描く図形は楕円である。

そこで、複素数の問題を座標平面の問題に置き換えて解く。2点 A, B は楕円の焦点にあたり、 $A(3, 0)$ 、 $B(-3, 0)$ なので $c = 3$ 。距離の和 $2a = 10$ より $a = 5$ 。

楕円の関係式 $c^2 = a^2 - b^2$ に代入すると

$$9 = 25 - b^2$$

$$b^2 = 16$$

よって標準形は $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 、焦点は $(3, 0)$ 、 $(-3, 0)$ である。

この問題が示しているのは、複素数の絶対値という「1つの数の大きさ」を表す道具が、そのまま複素数平面という舞台の上では「2点間の距離」という図形的な意味を持つということである。距離の意味さえ正しく読み替えれば、複素数の式であっても、焦点までの距離の和・差で定義された2次曲線の知識をそのまま使って解くことができる。

$|z - 3|$ 、 $|z + 3|$ をそれぞれ点 z から点 $(3, 0)$ 、 $(-3, 0)$ までの距離と読み替えると、条件は「2定点までの距離の和が一定」という楕円の定義そのものになる。標準形は $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 、焦点は $(3, 0)$ 、 $(-3, 0)$ 。複素数の絶対値を「距離」として図形的に読み替えることで、第1節の楕円の定義に直結する。

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分／配点 20点

太郎さんは文化祭で発表するミニチュアのパラボラアンテナを作ろうとしている。パラボラアンテナの断面は放物線になっていて、放物線の軸に平行に入ってきた電波は、反射して必ず1点（焦点）に集まる。受信部はこの焦点の位置に置かれる。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「アンテナの断面を、頂点が原点、軸が y 軸である放物線 $x^2 = 4py$ と考えよう。」

太郎「今回作るアンテナは、底（頂点）からの深さが2cmのところで、開口部の半径が4cmになるように設計したいです。」

先生「それなら、その1点（4, 2）を放物線の式に代入すれば p が求まるね。」

- (1) この放物線の方程式は $x^2 = \boxed{\text{ア}}y$ の形になる。またこの放物線の焦点の座標（受信部を置くべき位置）は、頂点から距離 $\boxed{\text{イ}}$ cm の点である。

ア 8 イ 2

放物線 $x^2 = 4py$ が点（4, 2）を通るので代入する。

$$4^2 = 4p \times 2$$

$$16 = 8p$$

$$p = 2$$

よって方程式は $4p = 8$ より $x^2 = 8y$ 。焦点は $(0, p) = (0, 2)$ 、つまり頂点から距離2cmの点。

$x^2 = 8y$ 。焦点は頂点から距離 2cm の点

(2)

花子「アンテナをもう少し大きくして、開口部の半径を6cmにしたら、深さはどう変わりますか。」

(1)で求めた放物線 $x^2 = 8y$ 上で、半径が6cmになる点の深さ y を求めると、

$$y = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \text{cm} \text{ である。}$$

ウ 9 エ 2

$x^2 = 8y$ に $x = 6$ を代入する。

$$6^2 = 8y$$

$$36 = 8y$$

$$y = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

$$y = \frac{9}{2} \text{cm}$$

(3)

太郎「(2)の縁の点から、受信部（焦点）までの距離も知りたいです。」

放物線の定義（焦点までの距離＝準線までの距離）を用いると、その距離は

$$\frac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}} \text{cm} \text{ である。}$$

オカ 13 キ 2

準線は $y = -p = -2$ 。(2)で求めた縁の点は $\left(6, \frac{9}{2}\right)$ 。

放物線の定義より、焦点までの距離＝準線までの距離。準線 $y = -2$ までの距離は

$$\frac{9}{2} - (-2) = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

$$\text{(検算：焦点}(0, 2)\text{までの直接の距離は } \sqrt{6^2 + \left(\frac{9}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{36 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{36 + 6.25} = \sqrt{42.25} = 6.5. \quad \frac{13}{2} = 6.5 \text{ と一致する。}$$

$$\text{距離は } \frac{13}{2} \text{ cm } (= 6.5 \text{ cm})$$

大問2 目標時間 8分／配点 20点

花子さんと太郎さんは、観覧車のゴンドラの位置を複素数平面で表す方法について話している。観覧車の中心を原点 O とし、半径は 10m である。ゴンドラAは、回転を始める瞬間、中心の真下（原点からの距離が半径と同じ点）にあるとする。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「ゴンドラAの初期位置は、複素数 $z_0 = -10i$ で表せるね。観覧車が反時計回りに回転すると、位置を表す複素数に、回転角に応じた複素数をかければいい。」

花子「複素数の積は、回転と拡大・縮小の組み合わせでしたね。今回は半径が変わらないから、かける数の絶対値はいつも1ということですね。」

(1)

120° 回転させるには $\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ をかければよい。

これを用いて、 120° 回転した後のゴンドラAの位置 $z_1 = z_0(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ を $a + bi$ の形で求めると、実部 $a = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ 、虚部 $b = \boxed{\text{ウ}}$ である。

ア 5 イ 3 ウ 5

$$z_1 = z_0(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = (-10i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

分配して計算する。

$$(-10i) \times \left(-\frac{1}{2} \right) = 5i$$

$$(-10i) \times \frac{\sqrt{3}}{2}i = -5\sqrt{3}i^2 = 5\sqrt{3}$$

たし合わせると

$$z_1 = 5\sqrt{3} + 5i$$

実部 $a = 5\sqrt{3}$ 、虚部 $b = 5$

(2)

太郎「ゴンドラAが1周するのに12分かかるとしたら、回転を始めてから8分後には、何度回転していますか。」

回転角は $\boxed{\text{エオカ}}$ °である。このときのゴンドラAの位置を $a + bi$ の形で求めると、実部 $a = -\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ 、虚部 $b = \boxed{\text{ケ}}$ である（符号に注意せよ）。

エオカ 240 キ 5 ク 3 ケ 5

1周（360°）するのに12分かかるので、8分後の回転角は

$$360^\circ \times \frac{8}{12} = 240^\circ$$

$$\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}, \sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ なので}$$

$$z_0(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = (-10i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

$$(-10i) \times \left(-\frac{1}{2} \right) = 5i$$

$$(-10i) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 5\sqrt{3}i^2 = -5\sqrt{3}$$

たし合わせると $-5\sqrt{3} + 5i$

回転角 240°。位置は実部 $-5\sqrt{3}$ 、虚部 5

(3)

花子「ゴンドラAが再び最初の位置（中心の真下）に戻ってくるのは、最短で何分後ですか。」

ゴンドラAが最短で最初の位置に戻るのは、回転を始めてから $\boxed{\text{コサ}}$ 分後であり、そのとき $\boxed{\text{シ}}$ 回転している。

複素数の偏角には 360° (2π) ごとに同じ点に戻るという周期性がある（ド・モアブルの定理の節で学んだ、1の n 乗根が n 個でちょうど一周し尽くすのと同じ考え方）。したがって、最初の位置にちょうど戻るのは、回転角がはじめて 360° の倍数になったとき。

観覧車は1周（ 360° ）するのに12分かかるので、 360° 回転するのにかかる時間は、そのまま1周にかかる時間12分と一致する。それより短い時間では 360° 未満しか回転しておらず、最初の位置には戻らない。

最短で12分後に戻り、そのとき1回転している