

# 数C まとめ

解答（全42問）

氏名 \_\_\_\_\_

得点      /42点

DRILL

## まとめテスト（標準）

### 基本（1～20）

1

ベクトルの実数倍と差

$\vec{a} = (5, -2)$ 、 $\vec{b} = (-3, 4)$  のとき、 $2\vec{a} - \vec{b}$  を成分で求めよ。

( 13 , -8 )

$$2\vec{a} = (10, -4)$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = (10 - (-3), -4 - 4) = (13, -8)$$

$$(13, -8)$$

2

ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (7, -24)$  の大きさ  $|\vec{a}|$  を求めよ。

$|\vec{a}| =$  25

$$|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + (-24)^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$$

$$|\vec{a}| = 25$$

3

内積の成分計算

$\vec{a} = (3, 5)$ 、 $\vec{b} = (-2, 4)$  のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{14}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times (-2) + 5 \times 4 = -6 + 20 = 14$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$$

4

垂直条件からtを求める

$\vec{a} = (6, -2)$ 、 $\vec{b} = (t, 9)$  が垂直であるとき、 $t$  の値を求めよ。

$$t = \underline{3}$$

垂直条件は  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。

$$6t + (-2) \times 9 = 6t - 18 = 0 \text{ より } t = 3$$

$$t = 3$$

5

内分点

$A(-2, 3)$ 、 $B(6, -5)$  について、線分ABを  $3 : 1$  に内分する点Pの座標を求めよ。

$$P(\underline{4}, \underline{-3})$$

内分点の公式 ( $m : n = 3 : 1$ ) :  $\vec{p} = \frac{1 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}}{3 + 1}$

$$\vec{p} = \frac{(-2, 3) + 3(6, -5)}{4} = \frac{(-2 + 18, 3 - 15)}{4} = \frac{(16, -12)}{4} = (4, -3)$$

$$P(4, -3)$$

6

重心

$A(1, 4)$ 、 $B(-3, 2)$ 、 $C(8, -6)$  を頂点とする三角形の重心Gの座標を求めよ。

$G(\underline{2}, \underline{0})$

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{(1, 4) + (-3, 2) + (8, -6)}{3} = \frac{(6, 0)}{3} = (2, 0)$$

$G(2, 0)$

7

空間：成分と大きさ

2点  $A(2, -1, 3)$ 、 $B(5, 3, 15)$  について、 $\overrightarrow{AB}$  の成分と大きさを求めよ。

$\overrightarrow{AB} = (\underline{3}, \underline{4}, \underline{12}) \quad |\overrightarrow{AB}| = \underline{13}$

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 2, 3 - (-1), 15 - 3) = (3, 4, 12)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\overrightarrow{AB} = (3, 4, 12), |\overrightarrow{AB}| = 13$$

8

空間：球面の方程式（平方完成）

方程式  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$  が表す球面の中心と半径を求めよ。

中心 ( -1 , 2 , -3 ) 半径 4

$x, y, z$ それぞれについて平方完成する。

$$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$$

$$y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$$

$$z^2 + 6z = (z + 3)^2 - 9$$

代入すると

$$(x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + (z + 3)^2 - 9 - 2 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 1 + 4 + 9 + 2 = 16$$

中心(-1, 2, -3)、半径4

9

放物線（焦点・準線）

$y^2 = 8x$  の焦点の座標と準線の方程式を求めよ。

焦点  $x = \underline{2}$      $y = \underline{0}$     準線  $x = \underline{-2}$

放物線の一般形は  $y^2 = 4px$  で、焦点は  $(p, 0)$ 、準線は  $x = -p$ 。いま  $4p = 8$  より  $p = 2$  なので、焦点  $(2, 0)$ 、準線  $x = -2$ 。

焦点  $(2, 0)$ 、準線  $x = -2$

10

楕円の焦点

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  の焦点の座標を求めよ。

焦点 ( $\pm$  4 , 0)

$a^2 = 25, b^2 = 9$ 。  $a > b$  なので焦点は  $x$  軸上。

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$  より  $c = 4$

焦点 ( $\pm 4, 0$ )

11

双曲線の頂点と漸近線

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  の頂点の座標（正の方）と、漸近線の傾き（正の方）を求めよ。

頂点 ( 4 , 0)    漸近線の傾き 3/4

$a^2 = 16, b^2 = 9$  より  $a = 4, b = 3$ 。頂点は  $(\pm 4, 0)$ 。

漸近線の傾きは  $\pm \frac{b}{a} = \pm \frac{3}{4}$

頂点  $(4, 0)$ 、漸近線の傾き  $\frac{3}{4}$

12

媒介変数表示から方程式へ（結果は details で確認）

$x = t^2, y = 2t$  で表される曲線の方程式を、 $x, y$  だけの式で表せ。

$y = 2t$  より  $t = \frac{y}{2}$ 。これを  $x = t^2$  に代入すると

$$x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{4}$$

$y^2 = 4x$  (放物線)

13

極座標→直交座標

極座標が  $(r, \theta) = \left(6, \frac{\pi}{3}\right)$  である点を、直交座標  $(x, y)$  で表せ。

$$x = \underline{3} \quad y = \underline{3\sqrt{3}}$$

$$x = r \cos \theta = 6 \cos \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$y = r \sin \theta = 6 \sin \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$(x, y) = (3, 3\sqrt{3})$$

14

複素数の絶対値

$z = 8 - 15i$  の絶対値  $|z|$  を求めよ。

$$|z| = \underline{17}$$

$$|z| = \sqrt{8^2 + (-15)^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$

$$|z| = 17$$

15

複素数の極形式

$z = \sqrt{3} + i$  を極形式  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) で表すときの  $r, \theta$  を求めよ。

$$r = \underline{2} \quad \theta = \underline{\pi/6}$$

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

実部・虚部がともに正で  $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$  より  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (第1象限)

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

16

共役複素数の性質

$z = 4 - 3i$  のとき、 $z\bar{z}$  の値を求めよ。

$$z\bar{z} = \underline{25}$$

$$\bar{z} = 4 + 3i$$

$$z\bar{z} = (4 - 3i)(4 + 3i) = 4^2 - (3i)^2 = 16 - (-9) = 25 \quad (z\bar{z} = |z|^2 \text{ に一致})$$

$$z\bar{z} = 25$$

17

複素数の積の図形的意味

$z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ 、 $z_2 = 3 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$  のとき、 $|z_1 z_2|$  と  $\arg(z_1 z_2)$  を求めよ。

$$|z_1 z_2| = \underline{6} \quad \arg(z_1 z_2) = \underline{90}$$

積の絶対値は絶対値どうしの積、偏角は偏角どうしの和。

$$|z_1 z_2| = 2 \times 3 = 6$$

$$\arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$|z_1 z_2| = 6, \arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{2} \quad (z_1 z_2 = 6i)$$

18

ド・モアブルの定理で累乗を計算

$z = 1 + i$  のとき、ド・モアブルの定理を用いて  $z^8$  の値を求めよ。

$$z^8 = \underline{16}$$

$z = 1 + i$  を極形式にすると  $|z| = \sqrt{2}$ 、 $\arg z = \frac{\pi}{4}$  なので  $z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ 。

ド・モアブルの定理より

$$z^8 = (\sqrt{2})^8 \left( \cos \frac{8\pi}{4} + i \sin \frac{8\pi}{4} \right) = 16(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16(1 + 0i) = 16$$

$$z^8 = 16$$

19

n乗根の個数と偏角の間隔

1の5乗根はいくつあるか。また、それらを複素数平面上に図示したときの、隣り合う点どうしの偏角の間隔を求めよ。

個数 5 個 偏角の間隔  $\frac{2\pi}{5}$

$z^5 = 1$  の解は、絶対値がすべて1、偏角が  $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$  の5個。

偏角は0から  $2\pi$  をちょうど5等分しているので、間隔は  $\frac{2\pi}{5}$ 。

5個、偏角の間隔は  $\frac{2\pi}{5}$  (正五角形の頂点になる)

$z_1 = 1 + 2i$ 、 $z_2 = 9 - 6i$  のとき、 $z_1$  から  $z_2$  に向かって  $3:1$  に内分する点  $z$  を求めよ。

実部 7    虚部 -4

$$\text{内分点の公式 } (m:n=3:1): z = \frac{1 \cdot z_1 + 3 \cdot z_2}{3+1}$$

$$z = \frac{(1+2i) + 3(9-6i)}{4} = \frac{(1+27) + (2-18)i}{4} = \frac{28-16i}{4} = 7-4i$$

$$z = 7 - 4i$$

## 標準 (21~34)

3点  $A(2, -1)$ 、 $B(5, 3)$ 、 $C(m, 15)$  が一直線上にあるとき、 $m$  の値を求めよ。

$$m = \underline{14}$$

$$\overrightarrow{AB} = (5-2, 3-(-1)) = (3, 4), \overrightarrow{AC} = (m-2, 15-(-1)) = (m-2, 16)$$

3点が一直線上にある条件は  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{AC}$  が平行、つまり

$$3 \times 16 - 4 \times (m-2) = 0$$

$$48 - 4m + 8 = 0$$

$$4m = 56 \text{ より } m = 14$$

$$m = 14$$

$A(1, -2)$ 、 $B(7, 4)$  について、線分ABを  $3 : 2$  に外分する点Qの座標を求めよ。

$Q( \underline{19} , \underline{16} )$

$$\text{外分点の公式 } (m : n = 3 : 2) : \vec{q} = \frac{-2\vec{a} + 3\vec{b}}{3 - 2} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{q} = -2(1, -2) + 3(7, 4) = (-2, 4) + (21, 12) = (19, 16)$$

$$Q(19, 16)$$

---

4点  $O(0, 0, 0)$ 、 $A(2, 1, 3)$ 、 $B(1, 3, -1)$ 、 $C(x, 5, 5)$  が同一平面上にあるとき、 $x$  の値を求めよ。

$$x = \underline{5}$$

4点が同一平面上にあるとは、点Cが「原点Oを通り、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ と $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ で張られる平面」上にあるということ。これは $\overrightarrow{OC} = s\vec{a} + t\vec{b}$ を満たす実数 $s, t$ が存在することと同じ意味。

成分ごとに方程式を立てる。

$$x\text{座標} : 2s + t = x$$

$$y\text{座標} : s + 3t = 5$$

$$z\text{座標} : 3s - t = 5$$

未知数 $x$ を含まない $y, z$ の式を先に連立して $s, t$ を求める。

$$y\text{座標の式} : s + 3t = 5$$

$$z\text{座標の式} : 3s - t = 5$$

$z$ 座標の式より $t = 3s - 5$ 。これを $y$ 座標の式に代入する。

$$s + 3(3s - 5) = 5$$

$$s + 9s - 15 = 5$$

$$10s = 20 \text{ より } s = 2$$

$$t = 3 \times 2 - 5 = 1$$

求めた $s = 2, t = 1$ を $x$ 座標の式に代入する。

$$x = 2s + t = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$x = 5$$

24

空間：内積から角度を求める

$\vec{a} = (1, 1, 0)$ 、 $\vec{b} = (1, 0, 1)$  のなす角 $\theta$ について、 $\cos \theta$ の値と $\theta$ を求めよ。

$$\cos \theta = \underline{\underline{1/2}} \quad \theta = \underline{\underline{60}} \text{ 度}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60^\circ$$

25

楕円：焦点までの距離の和

楕円  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$  上の点Pから一方の焦点Fまでの距離が7であるとき、もう一方の焦点F'までの距離を求めよ。

$$PF' = \underline{\underline{5}}$$

楕円の定義より、2焦点までの距離の和は常に $2a$ で一定。

$$a^2 = 36 \text{ より } a = 6, \quad 2a = 12$$

$$PF + PF' = 12$$

$$7 + PF' = 12 \text{ より } PF' = 5$$

$$PF' = 5$$

双曲線  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$  と直線  $y = x + k$  が接する（共有点がちょうど1個）ときの  $k$  の値をすべて求めよ（コンマ区切り）。

$$k = \underline{4, -4}$$

$y = x + k$  を  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$  に代入し、両辺を20倍する。

$$x^2 - 5(x + k)^2 = 20$$

$$x^2 - 5x^2 - 10kx - 5k^2 = 20$$

$$-4x^2 - 10kx - 5k^2 - 20 = 0$$

両辺に $-1$ を掛けて整理する。

$$4x^2 + 10kx + (5k^2 + 20) = 0$$

接する条件は判別式  $D = 0$ 。

$$D = (10k)^2 - 4 \times 4 \times (5k^2 + 20) = 100k^2 - 80k^2 - 320 = 20k^2 - 320$$

$$20k^2 - 320 = 0$$

$$k^2 = 16 \text{ より } k = \pm 4$$

$$k = 4, -4$$

極方程式  $r = 6 \cos \theta$  が表す図形の中心の座標と半径を求めよ。

$$\text{中心 ( } \underline{3}, \underline{0} \text{ ) 半径 } \underline{3}$$

両辺に $r$ をかける。

$$r^2 = 6r \cos \theta$$

$r^2 = x^2 + y^2$ ,  $r \cos \theta = x$  を代入する。

$$x^2 + y^2 = 6x$$

$$x^2 - 6x + y^2 = 0$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 9$$

中心(3, 0)、半径3の円

$z = a + 3i$  ( $a$ は実数)、 $w = 2 - i$  とする。 $\frac{z}{w}$  が実数になるように、 $a$  の値を求めよ。

$$a = \underline{\underline{-6}}$$

$\frac{z}{w}$  が実数  $\iff z\bar{w}$  が実数  $\iff z\bar{w}$  の虚部が0。

$$\bar{w} = 2 + i$$

$$z\bar{w} = (a + 3i)(2 + i) = 2a + ai + 6i + 3i^2 = (2a - 3) + (a + 6)i$$

虚部が0になる条件は

$$a + 6 = 0 \text{ より } a = -6$$

$$\begin{aligned} \text{(検算: } z = -6 + 3i, \frac{z}{w} &= \frac{-6 + 3i}{2 - i} = \frac{(-6 + 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \\ &= \frac{(-12 - 3) + (-6 + 6)i}{5} = \frac{-15 + 0i}{5} = -3. \text{ 確かに実数。)} \end{aligned}$$

$$a = -6$$

方程式  $z^3 = 8i$  の解はすべて絶対値が等しく、偏角が等間隔に並ぶ。解の絶対値と、偏角の間隔を求めよ。

絶対値 2      偏角の間隔 120

右辺を極形式にする。 $8i = 8 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  とおくと、ド・モアブルの定理より  $z^3 = \rho^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$ 。絶対値を比較して  $\rho^3 = 8$  より  $\rho = 2$ 。偏角を比較して  $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  より  $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$  ( $k = 0, 1, 2$  の3個)。

3個の解が0から  $2\pi$  を等間隔に分けるので、間隔は  $\frac{2\pi}{3}$ 。実際に3つの解を求めると  $z = \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i$  (絶対値はすべて2で一致)。

絶対値は2、偏角の間隔は  $\frac{2\pi}{3}$

1の6乗根のうち、偏角が  $\frac{\pi}{3}$  であるものを  $a + bi$  の形で求めよ。

実部 1/2      虚部  $\sqrt{3}/2$

1の6乗根は絶対値がすべて1なので、偏角  $\frac{\pi}{3}$  ( $= 60^\circ$ ) の解は

$$\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  (実部  $\frac{1}{2}$ 、虚部  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。6個の解は正六角形の頂点になる)

$z_1 = 3 + 2i$ 、 $z_2 = -1 + 10i$  について、 $z_1$  から  $z_2$  に向かって  $3:1$  に内分する点  $z$  を求めよ。ベクトルの内分点公式  $\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$  の  $\vec{a}, \vec{b}$  を  $z_1, z_2$  に置き換えるだけで同じように計算できることを確認せよ。

実部 0    虚部 8

内分点の公式 ( $m:n = 3:1$ ) はベクトルでも複素数でも同じ形： $z = \frac{1 \cdot z_1 + 3 \cdot z_2}{3+1}$

$$z = \frac{(3+2i) + 3(-1+10i)}{4} = \frac{(3-3) + (2+30)i}{4} = \frac{0+32i}{4} = 8i$$

$z = 8i$  (実部0、虚部8)

複素数  $z$  が  $|z - (6 + 8i)| = 1$  を満たしながら動くとき、 $|z|$  の最大値・最小値を求めよ。

最大値 11    最小値 9

この式は、中心  $6 + 8i$ 、半径1の円を表す。中心と原点の距離は

$$|6 + 8i| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$|z|$  (原点からの距離) は、原点・中心・円周上の点が一直線に並ぶときに最大・最小になる。最大は中心の外側 (中心の距離+半径)、最小は中心の内側 (中心の距離-半径)。

$$\text{最大値: } 10 + 1 = 11 \quad \text{最小値: } 10 - 1 = 9$$

最大値11、最小値9

複素数 $z_1 = 3 + 4i$ 、 $z_2 = x + 6i$ （ $x$ は実数）について、原点 $O$ と点 $z_1$ 、点 $z_2$ を結んでできる角 $\angle z_1 O z_2$ が直角になるように $x$ の値を求めよ。

$$x = \underline{-8}$$

$\angle z_1 O z_2$ が直角、つまり $\frac{z_2}{z_1}$ が純虚数になる条件を、 $z_2 \bar{z}_1$ の実部が0という形で調べる。

$$\bar{z}_1 = 3 - 4i$$

$$z_2 \bar{z}_1 = (x + 6i)(3 - 4i) = 3x - 4xi + 18i - 24i^2 = (3x + 24) + (18 - 4x)i$$

実部が0になる条件は

$$3x + 24 = 0 \text{ より } x = -8$$

（検算：ベクトル $OA=(3,4)$ 、 $OB=(-8,6)$ とみると、内積は $3 \times (-8) + 4 \times 6 = -24 + 24 = 0$ 。ベクトルの垂直条件で解いても同じ答えになる。）

$$x = -8$$

楕円上の点 $P$ を $x = 7 \cos \theta$ 、 $y = 4 \sin \theta$ （ $0 \leq \theta < 2\pi$ ）と媒介変数表示する。

$\overrightarrow{OP}$ の大きさ $|\overrightarrow{OP}|$ の最大値・最小値を求めよ。

$$\text{最大値 } \underline{7} \quad \text{最小値 } \underline{4}$$

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = x^2 + y^2 = 49 \cos^2 \theta + 16 \sin^2 \theta$$

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ を使って $\cos^2 \theta$ だけの式にする。

$$= 49 \cos^2 \theta + 16(1 - \cos^2 \theta) = 16 + 33 \cos^2 \theta$$

$\cos^2 \theta$ の範囲は0以上1以下なので、 $|\overrightarrow{OP}|^2$ は16（ $\cos \theta = 0$ 、頂点 $(0, 4)$ ）から49（ $\cos \theta = \pm 1$ 、頂点 $(\pm 7, 0)$ ）まで動く。

$|\overrightarrow{OP}|$ にすると4から7。

最大値7（長軸の頂点）、最小値4（短軸の頂点）

35

融合：双曲線の媒介変数表示と原点からの最小距離

双曲線  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  上の点Pのうち、原点Oから最も近い点までの距離  $|\overrightarrow{OP}|$  の最小値を求めよ ( $P$ は右側の枝、 $x > 0$ とする)。

最小値 4

右側の枝を媒介変数表示すると  $x = \frac{4}{\cos \theta}$ ,  $y = 3 \tan \theta$ 。

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = x^2 + y^2 = \frac{16}{\cos^2 \theta} + 9 \tan^2 \theta$$

三角関数の相互関係  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$  を使って  $\tan^2 \theta$  だけの式にする。  
 $= 16(1 + \tan^2 \theta) + 9 \tan^2 \theta = 16 + 25 \tan^2 \theta$

$\tan^2 \theta \geq 0$  なので、この式は  $\tan \theta = 0$  のとき最小値16をとる。 $\tan \theta = 0$  は頂点  $(4, 0)$  に対応する。

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = 16 \text{ より } |\overrightarrow{OP}| = 4$$

最小値4 (頂点(4, 0)でとる)

複素数平面上に3点  $A(z_1 = 1 + i)$ 、 $B(z_2 = 5 + 3i)$ 、 $C(z_3 = k + 7i)$  ( $k$ は実数) がある。 $\angle B$ が直角になるように  $k$  の値を求めよ。

$$k = \underline{\underline{3}}$$

$\angle B$ が直角、つまり  $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ 。複素数では  $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$  が純虚数になる条件として調べる。

$$z_1 - z_2 = (1 - 5) + (1 - 3)i = -4 - 2i$$

$$z_3 - z_2 = (k - 5) + (7 - 3)i = (k - 5) + 4i$$

$(z_3 - z_2) \times \overline{(z_1 - z_2)}$  の実部が0になればよい。 $\overline{z_1 - z_2} = -4 + 2i$ 。

$$\begin{aligned} [(k - 5) + 4i](-4 + 2i) &= (k - 5)(-4) + (k - 5)(2i) + 4i(-4) + 4i(2i) \\ &= -4(k - 5) + 8i^2 + [2(k - 5) - 16]i \\ &= -4k + 20 - 8 + (2k - 26)i \\ &= (12 - 4k) + (2k - 26)i \end{aligned}$$

$$\text{実部が0} : 12 - 4k = 0 \text{より} k = 3$$

(検算：ベクトルでも同じ答えになるか確かめる。 $\overrightarrow{BA} = (1 - 5, 1 - 3) = (-4, -2)$ 、 $\overrightarrow{BC} = (k - 5, 4)$ 。内積  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4(k - 5) - 8 = 12 - 4k$ 。これも  $k = 3$  で0になり一致する。)

$$k = 3$$

1の4乗根は複素数平面上で正方形の頂点をなす。隣り合う頂点どうしの距離（正方形の1辺の長さ）と、向かい合う頂点どうしの距離（対角線の長さ）を求めよ。

辺の長さ  $\sqrt{2}$  対角線の長さ 2

1の4乗根は1,  $i$ ,  $-1$ ,  $-i$ の4個で、複素数平面上の点  
(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)にあたる。

隣り合う頂点（例えば1と $i$ ）の距離は、大きさの引き算ではなく差の絶対値で求める。

$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

向かい合う頂点（例えば1と $-1$ ）の距離は

$$|1 - (-1)| = |2| = 2$$

辺の長さ $\sqrt{2}$ 、対角線の長さ2

楕円  $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$  の2つの焦点をF, F'とする。楕円の短軸の頂点（ $y$ 座標が正の方）をPとするとき、三角形PFF'の重心Gの座標を求めよ。

G( 0 , 8 )

$a^2 = 625$ ,  $b^2 = 576$ より $a = 25$ ,  $b = 24$ 。  $c^2 = a^2 - b^2 = 625 - 576 = 49$ より  
 $c = 7$ 。

焦点は $F(7, 0)$ ,  $F'(-7, 0)$ 、短軸の頂点は $P(0, 24)$ 。

重心の公式（ベクトルの重心公式がそのまま使える）：

$$\vec{g} = \frac{\vec{p} + \vec{f} + \vec{f'}}{3} = \frac{(0, 24) + (7, 0) + (-7, 0)}{3} = \frac{(0, 24)}{3} = (0, 8)$$

G(0, 8)

放物線  $y^2 = 24x$  の焦点をFとする。放物線上の点で  $y = 12$  となる点をPとするとき、 $\overrightarrow{FP}$ の大きさ $|\overrightarrow{FP}|$ を、ベクトルの大きさの公式を使って求めよ。また、それが放物線の定義（焦点までの距離＝準線までの距離）と一致することを確認めよ。

$$|\overrightarrow{FP}| = \underline{12}$$

$4p = 24$ より $p = 6$ 。焦点 $F(6, 0)$ 、準線 $x = -6$ 。

$y = 12$ のとき $x = \frac{12^2}{24} = \frac{144}{24} = 6$ 、点 $P(6, 12)$ 。

ベクトルの大きさの公式で $|\overrightarrow{FP}|$ を求める。

$$\overrightarrow{FP} = (6 - 6, 12 - 0) = (0, 12)$$

$$|\overrightarrow{FP}| = \sqrt{0^2 + 12^2} = 12$$

放物線の定義で確かめる。準線 $x = -6$ までの距離は $6 - (-6) = 12$ 。ベクトルの大きさを求めた12と一致する。

$$|\overrightarrow{FP}| = 12 \text{ (準線までの距離12と一致)}$$

1の5乗根を $z_0 = 1, z_1, z_2, z_3, z_4$ とする。これらを原点からの位置ベクトルとみなしたとき、その和 $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ の値（実部・虚部）を求めよ。

実部 0    虚部 0

1の5乗根は正五角形の頂点として、単位円周上に対称に並んでいる。位置ベクトルとしての和（=5個の頂点の重心を5倍した値）を考えると、正五角形の対称性から重心はちょうど原点にくるはずである。

実際に確かめる。 $z_0, \dots, z_4$ は $z^5 = 1$ の5つの解であり、 $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ という因数分解が成り立つ。 $z_1, z_2, z_3, z_4$ は $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ の解なので、解と係数の関係より $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1$ （ $z^3$ の係数が1、 $z^4$ の係数が1なので、和は $-\frac{1}{1} = -1$ ）。

これに $z_0 = 1$ を加えると

$$z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1 + (-1) = 0$$

**実部0、虚部0（和は0。正五角形の重心が原点にあることに対応する）**

DRILL

## 記述チャレンジ

---

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

ベクトルの内分点公式  $\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$  と、複素数平面の内分点公式  $z = \frac{nz_1 + mz_2}{m + n}$  は、まったく同じ形をしている。なぜ同じ形になるのかを、具体的な数値例を1つ挙げながら説明せよ。

例として、 $A(1, 2)$ 、 $B(9, -2)$ を結ぶ線分ABを3 : 1に内分する点を考える。ベクトルとして解くと、位置ベクトル  $\vec{a} = (1, 2)$ 、 $\vec{b} = (9, -2)$ を使って

$$\vec{p} = \frac{1 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}}{3 + 1} = \frac{(1, 2) + 3(9, -2)}{4} = \frac{(1 + 27, 2 - 6)}{4} = \frac{(28, -4)}{4} = (7, -1)$$

同じ2点を複素数  $z_1 = 1 + 2i$ 、 $z_2 = 9 - 2i$ として考え、同じ内分点公式に当てはめる。

$$z = \frac{1 \cdot z_1 + 3 \cdot z_2}{3 + 1} = \frac{(1 + 2i) + 3(9 - 2i)}{4} = \frac{(1 + 27) + (2 - 6)i}{4} = \frac{28 - 4i}{4} = 7 - i$$

結果を見比べると、ベクトルで求めた  $P(7, -1)$ と、複素数で求めた  $z = 7 - i$ は、同じ点を指している ( $7 - i$ は座標でいえば  $(7, -1)$ である)。

なぜ同じ形になるのかというと、複素数  $a + bi$ は本質的に成分  $(a, b)$ のベクトルと同じ足し算・実数倍のルールに従うからである。複素数どうしの和は  $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ であり、これは成分ごとに足すというベクトルの和とまったく同じ計算である。実数倍  $k(a + bi) = ka + kbi$ も同様に、ベクトルの実数倍  $k(a, b) = (ka, kb)$ と同じ計算である。内分点の公式は、この「足し算」と「実数倍」だけを使って導かれる公式なので、ベクトルで導いても複素数で導いても、途中の計算がすべて同じ形になり、結果として同じ式が得られる。

**複素数の和・実数倍は成分ごとの計算としてベクトルの和・実数倍とまったく同じルールに従うため、その2つの演算だけで導かれる内分点公式も同じ形になる。** $A(1, 2)$ 、 $B(9, -2)$ を3 : 1に内分する点は、ベクトルでも複素数でも同じ  $(7, -1)$  ( $z = 7 - i$ ) を与える。

**記2** 円・楕円・双曲線・放物線は、どれも「距離に関する条件」として定義される。この4つの定義に共通する考え方を、具体的な数値例を1つ挙げながら説明せよ。

4つの曲線の定義を、それぞれ言葉にして比べてみる。

円：中心から一定の距離 $r$ にある点の集合。

楕円：2定点（焦点）までの距離の和が一定（ $= 2a$ ）である点の集合。

双曲線：2定点（焦点）までの距離の差の絶対値が一定（ $= 2a$ ）である点の集合。

放物線：1定点（焦点）までの距離と、1直線（準線）までの距離が等しい点の集合。

言葉だけを見ると別々の定義に見えるが、どれも主役は「距離」という同じ量である。

この共通点を、楕円  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  ( $a = 5, b = 3, c = 4$ 、焦点  $F(4, 0), F'(-4, 0)$ ) 上の点  $P(0, 3)$  (短軸の頂点) で確かめる。

$PF$ の距離を、ベクトルの大きさの公式（三平方の定理）で計算する。

$$\overrightarrow{FP} = (0 - 4, 3 - 0) = (-4, 3)$$

$$PF = |\overrightarrow{FP}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

同じように  $PF'$  も

$$\overrightarrow{F'P} = (0 - (-4), 3 - 0) = (4, 3)$$

$$PF' = |\overrightarrow{F'P}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$PF + PF' = 5 + 5 = 10$  となり、確かに  $2a = 2 \times 5 = 10$  と一致する。この計算からわかるように、楕円の定義「距離の和が一定」という言葉は、実際には

$\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$  という同じ形の計算（ベクトルの大きさの公式）を2回行い、その結果を足し合わせているにすぎない。双曲線なら同じ計算を引き算し、放物線なら片方を（もっと単純な）座標の差に置き換えているだけで、根っこにある「距離を測る」という作業はすべて同じである。

このように、円・楕円・双曲線・放物線という一見バラバラな4つの図形は、「距離」という共通の量についての条件（等しい・和が一定・差が一定・2種類の距離が等しい）として統一的に理解でき、その距離を実際に数値として求める場面では、ベクトルの大きさの公式がいつも同じ形で働いている。

円・楕円・双曲線・放物線はすべて「距離」についての条件として定義され、その距

離はベクトルの大きさの公式  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$  で共通に計算できる。楕円  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  上の点  $(0, 3)$  で  $PF = PF' = 5$  となり、 $PF + PF' = 10 = 2a$  が実際に確かめられる。

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 12分／配点 20点

太郎さんと花子さんは、文化祭の模擬店で使う三角形の敷地OABに、テントの支柱や商品の受け渡し場所を配置する計画を立てている。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (9, 3)$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (3, 9)$ とする。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「まず、商品を受け渡す場所として、線分ABを1:2に内分する点Pを決めよう。」

太郎「位置ベクトルの公式を使えば、Oから見たPの位置がすぐわかりますね。」

- (1) 線分ABを1:2に内分する点をPとする。 $\overrightarrow{OP}$ を求めると、 $\overrightarrow{OP} = (\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ である。

ア 7 イ 5

$$\begin{aligned} \text{内分点の公式 } (m:n=1:2): \overrightarrow{OP} &= \frac{2\vec{a} + 1 \cdot \vec{b}}{1+2} \\ &= \frac{2(9, 3) + (3, 9)}{3} = \frac{(18+3, 6+9)}{3} = \frac{(21, 15)}{3} = (7, 5) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OP} = (7, 5)$$

- (2) 花子「次に、(1)で求めた点Pを基準にして、支柱を垂直に立てる場所を決めましょう。点Pから辺OBに下ろした垂線の足をQとします。」

$$\overrightarrow{OQ} = t\vec{b} \quad (t \text{ は実数}) \quad \text{とおくと、} \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OB} \text{ より } t = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}} \text{ である。}$$

ウエ 11 オカ 15

(1)で求めた $\overrightarrow{OP} = (7, 5)$ を使う。 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ とすると $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = t\vec{b} - \vec{p}$

垂直条件 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{b} = 0$ より

$$(t\vec{b} - \vec{p}) \cdot \vec{b} = t|\vec{b}|^2 - \vec{p} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{p} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{b} = 7 \times 3 + 5 \times 9 = 21 + 45 = 66$$

$$|\vec{b}|^2 = 3^2 + 9^2 = 9 + 81 = 90$$

$$90t - 66 = 0 \text{ より } t = \frac{66}{90} = \frac{11}{15}$$

$$t = \frac{11}{15}$$

(3) 太郎「最後に、受け渡しコーナーの飾りつけに使う布がどれくらい必要か、(1)で求めたPと(2)で求めたQを結んでできる三角形APQの面積を計算して見積もりましょう。」

花子「 $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AQ}$ の2つのベクトルが分かれば、面積の公式で求められますね。」

(1)で求めたPと(2)で求めたQを用いて、三角形APQの面積 $S$ を求めると、 $S =$

キク

である。

ケ

キク 16 ケ 5

(1)で求めた $\overrightarrow{OP} = (7, 5)$ を使うと

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (7 - 9, 5 - 3) = (-2, 2)$$

(2)で求めた $t = \frac{11}{15}$ を使うと

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{11}{15}\vec{b} = \frac{11}{15}(3, 9) = \left(\frac{11}{5}, \frac{33}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{11}{5} - 9, \frac{33}{5} - 3\right) = \left(-\frac{34}{5}, \frac{18}{5}\right)$$

$\overrightarrow{AP} = (a_1, a_2)$ 、 $\overrightarrow{AQ} = (b_1, b_2)$ とするとき、三角形APQの面積は $S =$

$\frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$ で求まる。

$$S = \frac{1}{2} \left| (-2) \times \frac{18}{5} - 2 \times \left( -\frac{34}{5} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| -\frac{36}{5} + \frac{68}{5} \right| = \frac{1}{2} \times \frac{32}{5} = \frac{16}{5}$$

$$S = \frac{16}{5}$$

大問2 目標時間 12分/配点 20点

太郎さんと花子さんは、文化祭で展示するミニチュアのパラボラアンテナと、音がよく反響する楕円形の壁（ウィスパーギャラリー）について調べている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「まず、アンテナの鏡の断面を放物線 $y^2 = 20x$ と考えよう。放物線に平行に入ってきた電波は、反射してすべて焦点に集まる。」

花子「焦点の位置が受信部を置くべき場所ですね。」

- (1) 放物線 $y^2 = 20x$ の焦点の座標は( ア , 0)、準線の方程式は $x =$  イである ( イ は符号も含めて入力せよ)。

ア 5 イ -5

放物線の一般形は $y^2 = 4px$ で、焦点は $(p, 0)$ 、準線は $x = -p$ 。いま $4p = 20$ より $p = 5$ なので、焦点 $(5, 0)$ 、準線 $x = -5$ 。

焦点 $(5, 0)$ 、準線 $x = -5$

- (2) 太郎「鏡の縁の、 $y = 10$ の高さにある点から、受信部（焦点）までの距離を知りたいです。」

$y^2 = 20x$ 上で $y = 10$ のときの $x$ 座標は ウ であり、この点から焦点までの距離は エオ である。

ウ 5 エオ 10

$y = 10$ を $y^2 = 20x$ に代入すると  
 $100 = 20x$ より $x = 5$ 。点は $(5, 10)$ 。

放物線の定義（焦点までの距離＝準線までの距離）より、準線 $x = -5$ までの距離を求めればよい。

$$5 - (-5) = 10$$

（検算：焦点 $(5, 0)$ までの直接の距離は $\sqrt{(5 - 5)^2 + 10^2} = \sqrt{0 + 100} = 10$ 。  
一致する。）

$x = 5$ 、焦点までの距離は10

(3)

先生「今度は展示替えして、楕円形の壁 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ を使ったウィスパーギャラリーを作ろう。楕円には、一方の焦点で発した音が、反射してもう一方の焦点に集まるという性質がある。」

花子「この楕円の焦点の1つは、(1)で求めたアンテナの焦点とちょうど同じ $(5, 0)$ の位置になるように設計されているんですね。」

この楕円上の点Pから焦点 $(5, 0)$ までの距離が9であるとき、もう一方の焦点までの距離は カキ である。

カキ 17

$$a^2 = 169, b^2 = 144 \text{ より } a = 13, b = 12, 2a = 26.$$

（検算： $c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 144 = 25$ より $c = 5$ 。焦点は $(\pm 5, 0)$ となり、確かに(1)で求めたアンテナの焦点 $(5, 0)$ と一致する。）

楕円の定義より、2焦点までの距離の和は $2a = 26$ で一定。

$$9 + PF' = 26 \text{ より } PF' = 17$$

もう一方の焦点までの距離は17

大問3 目標時間 11分／配点 20点

太郎さんは、文化祭で展示する模型の風車（3枚羽根のプロペラ）を作ろうとしている。羽根の先端の位置を複素数平面で表すことにする。中心を原点Oとし、羽根の先端は半径6の円周上を等間隔（ $120^\circ$ ごと）に3か所ある。1枚目の羽根の先端の位置は、真上を指す $z_0 = 6i$ とする。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「 $120^\circ$ 回転させるには $\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ をかければいい。3枚の羽根は、 $z_0$ を $0^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ 回転させた位置にある。」

- (1) 2枚目の羽根の先端の位置  $z_1 = z_0(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$  を  $a + bi$  の形で求めると、実部  $a = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ 、虚部  $b = \boxed{\text{ウ}}$  である（ア・ウは符号も含めて入力せよ）。

ア -3 イ 3 ウ -3

$$z_1 = z_0(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 6i \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

分配して計算する。

$$6i \times \left( -\frac{1}{2} \right) = -3i$$

$$6i \times \frac{\sqrt{3}}{2}i = 3\sqrt{3}i^2 = -3\sqrt{3}$$

たし合わせると

$$z_1 = -3\sqrt{3} - 3i$$

実部  $a = -3\sqrt{3}$ 、虚部  $b = -3$

- (2) 先生「 $240^\circ = 120^\circ + 120^\circ$ だから、3枚目の羽根の位置は、(1)で求めた  $z_1$  をさらに  $120^\circ$  回転させても求められるよ。」

(1)で求めた  $z_1$  を用いて  $z_2 = z_1(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$  を計算し、 $a + bi$  の形で求めると、実部  $a = \boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ 、虚部  $b = \boxed{\text{カ}}$  である（カは符号も含めて入力せよ）。

エ 3 オ 3 カ -3

(1)で求めた $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i$ を使う。 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので

$$z_2 = z_1 \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = (-3\sqrt{3} - 3i) \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

分配して計算する。

$$(-3\sqrt{3}) \times \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$(-3\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{9}{2}i$$

$$(-3i) \times \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}i$$

$$(-3i) \times \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{3\sqrt{3}}{2}i^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{実部を合計: } \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{虚部を合計: } -\frac{9}{2}i + \frac{3}{2}i = -3i$$

たし合わせると

$$z_2 = 3\sqrt{3} - 3i$$

$$(\text{検算: 直接 } z_0(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 6i \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -3i -$$

$$3\sqrt{3}i^2 = 3\sqrt{3} - 3i \text{ で一致する。})$$

**実部** $a = 3\sqrt{3}$ 、**虚部** $b = -3$

(3)

花子「3枚の羽根がちょうど正三角形の頂点になっているか、確かめてみましょう。」

$z_0 + z_1 + z_2$ の値を求めると、実部＝キ、虚部＝クである。また、隣り合う羽根の先端どうしの距離 $|z_1 - z_0|$ を求めるとケ $\sqrt{\text{コ}}$ である。

キ 0    ク 0    ケ 6    コ 3

$$z_0 + z_1 + z_2 = 6i + (-3\sqrt{3} - 3i) + (3\sqrt{3} - 3i)$$

$$\text{実部: } 0 + (-3\sqrt{3}) + 3\sqrt{3} = 0$$

$$\text{虚部: } 6 + (-3) + (-3) = 0$$

3枚の羽根が正三角形の対称な配置にあるため、位置ベクトルとしての和はちょうど原点になる（重心が中心Oに一致することに対応する）。

隣り合う羽根の距離は、差の絶対値で求める。

$$z_1 - z_0 = (-3\sqrt{3} - 0) + (-3 - 6)i = -3\sqrt{3} - 9i$$

$$|z_1 - z_0| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + (-9)^2} = \sqrt{27 + 81} = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$$

$$z_0 + z_1 + z_2 = 0 \text{ (実部0、虚部0)。隣り合う羽根の距離は} 6\sqrt{3}$$