

数学的帰納法

問題プリント（全24問）

氏名 _____

得点 _____ / 24点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6） 等式の証明

1 等式（自然数の和）

等式 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 6$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺
 $n=6$ の右辺

2 等式（奇数の和）

等式 $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 5$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺
 $n=5$ の右辺

3 等式（偶数の和）

等式 $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺
 $n=4$ の右辺

4 等式（平方の和）

等式 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺
 $n=3$ の右辺

5 等式（連続整数の積の和）

等式 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺
 $n=3$ の右辺

6 等式（分数の和）

等式 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺
 $n=4$ の右辺

標準 (7~12) 等式・不等式・倍数のいろいろな型

7 等式 (等比数列の和)

等式 $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺
 $n=3$ の右辺

8 不等式 (基本形)

不等式 $2^n \geq n + 1$ ($n \geq 1$) を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺
 $n=4$ の左辺
 $n=4$ の右辺

9 不等式 (指数と1次式)

不等式 $3^n > 2n$ ($n \geq 1$) を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺
 $n=4$ の左辺
 $n=4$ の右辺

10 倍数の証明

すべての自然数 n について $n^3 - n$ は 6 の倍数であることを証明する過程の空欄を埋めよ。
 $(k+1)^3 - (k+1)$ を展開して整理すると $(k^3 - k) + \square k^2 + \square k$ の形になる ($\square$ は同じ数)。また、この式が6の倍数だと示すには $k(k+1)$ が $\square$ の倍数であることを使う。

k^2 の係数 k の係数
 $k(k+1)$ が の倍数

11 倍数の証明

すべての自然数 n について $4^n - 1$ は 3 の倍数であることを証明する過程の空欄を埋めよ。
 $4^k - 1 = 3m$ とおくと、 $4^{k+1} - 1 = 4(3m + 1) - 1$ を計算すると $\square m + \square$ となり、これは $3(\square m + 1)$ の形にまとめられる。

m の係数 定数項
 $3(\square m + 1)$ の中の係数

12 等式 (立方の和)

等式 $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺
 $n=3$ の右辺

記述式に挑戦 (13~16) 仮定を使う変形の途中の数値を埋めよう

13 不等式 (指数と2次式)

$n \geq 5$ を満たすすべての自然数 n について $2^n > n^2$ が成り立つことを証明する。 $n = 5$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。また、証明の途中で $2k^2 \geq (k+1)^2$ を示すには $k^2 - \square k - \square \geq 0$ ($k \geq 5$ で成立) を示せばよい。 $\square$ に当てはまる数を求めよ。

$n=5$ の左辺 $n=5$ の右辺
 k の係数 定数項

14 倍数の証明

すべての自然数 n について $5^n - 1$ は 4 の倍数であることを証明する。 $5^k - 1 = 4m$ とおくと $5^{k+1} - 1 = 5(4m + 1) - 1$ を計算すると $\square m + \square$ となり、これは $4(\square m + 1)$ の形にまとめられる。 $\square$ に当てはまる数を求めよ。

m の係数 定数項
 $4(\square m + 1)$ の中の係数

15

漸化式との融合

$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = A \cdot 3^{n-1} - B$ の形に推測したとき、 A, B の値を求めよ。また a_4 の値を求めよ。

A= B= a4=

16

漸化式との融合

$a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n - 1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = 2^{n-1} + C$ の形に推測したとき、 C の値を求めよ。また a_5 の値を求めよ。

C= a5=

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。一般項を推測してから証明する、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

漸化式（非斉次形）

$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = A \cdot 2^{n-1} - n - 1$ の形に推測したとき、 A の値を求めよ。また a_5 の値を求めよ。

A= a5=

応2

不等式（階乗と指数）

$n! > 2^n$ が成り立つ最小の自然数 n を求め、その n 以上のすべての自然数で成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。まず、その最小の n （基準となる n ）における左辺・右辺の値を求めよ。

成り立つ最小の n =

そのときの左辺($n!$)=

右辺(2^n)=

応3

倍数の証明（発展）

すべての自然数 n について $7^n - 6n - 1$ は 36 の倍数であることを証明する。 $n = 2, 3$ のときの値を求めよ。また、証明の途中で $7 \cdot 7^k = 7(36m + 6k + 1)$ を計算すると $252m + \square k + \square$ となり、最終的に $36(\square m + k)$ の形にまとめられる。 $\square$ に当てはまる数を求めよ。

$n=2$ の値 $n=3$ の値

k の係数 定数項

m の係数(まとめ後)

応4

漸化式（指数の項を含む）

$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = n \cdot 2^{n-C}$ の形に推測したとき、 C の値を求めよ。また a_6 の値を求めよ。

C= a6=

応5

不等式（評価・上からおさえる）

$n \geq 2$ を満たすすべての自然数 n について $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{D}{n}$ が成り立つ。この D の値を求めよ。また $n = 2$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。

D= $n=2$ の左辺

$n=2$ の右辺

応6

2段仮定型の数学的帰納法（隣接3項間漸化式対応）

$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、 $a_n = 2^n - 1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。まず $n = 1, n = 2$ の値、また a_5 の値を求めよ。

n=1の値 n=2の値
 $a_5 =$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

数学的帰納法の手順2では「 $n = k$ のとき成り立つと仮定して、 $n = k + 1$ のときも成り立つことを示す」という操作を行う。これは証明したい結論を先に使っているように見えるが、なぜ循環論法にならないのかを、ドミノ倒しのたとえに触れながら説明せよ。

記2

等式 $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$ を数学的帰納法で証明せよ。