

数学的帰納法

問題プリント（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6） 等式の証明

1

等式（自然数の和）

等式 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 6$ のときの右辺の値を求めよ。

n=1の左辺

n=1の右辺

n=6の右辺

計算スペース

2

等式（奇数の和）

等式 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 5$ のときの右辺の値を求めよ。

n=1の左辺

n=1の右辺

n=5の右辺

計算スペース

3

等式（偶数の和）

等式 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの右辺の値を求めよ。

n=1の左辺

n=1の右辺

n=4の右辺

計算スペース

4

等式（平方の和）

等式 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を数学的帰納法で証明する。

$n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺

$n=1$ の右辺

$n=3$ の右辺

計算スペース

5

等式（連続整数の積の和）

等式 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ を数学的帰納法で証明する。

$n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺

$n=1$ の右辺

$n=3$ の右辺

計算スペース

等式 (分数の和)

$n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの右辺の値を求めよ。

--

標準（7～12） 等式・不等式・倍数のいろいろな型

等式 (等比数列の和)

のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

□ □ □ □ □

8

不等式（基本形）

不等式 $2^n \geq n + 1$ ($n \geq 1$) を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。

n=1の左辺 n=1の右辺 n=4の左辺
 n=4の右辺

計算スペース

9

不等式（指数と1次式）

不等式 $3^n > 2n$ ($n \geq 1$) を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。

n=1の左辺 n=1の右辺 n=4の左辺
 n=4の右辺

計算スペース

10

倍数の証明

すべての自然数 n について $n^3 - n$ は 6 の倍数であることを証明する過程の空欄を埋めよ。 $(k+1)^3 - (k+1)$ を展開して整理すると $(k^3 - k) + \square k^2 + \square k$ の形になる ($\square$ は同じ数)。また、この式が6の倍数だと示すには $k(k+1)$ が $\square$ の倍数であることを使う。

 k^2 の係数

--

kの係数

 $k(k+1)$ が〃

の倍数

計算スペース

11

倍数の証明

すべての自然数 n について $4^n - 1$ は **3** の倍数であることを証明する過程の空欄を埋めよ。 $4^k - 1 = 3m$ とおくと、 $4^{k+1} - 1 = 4(3m + 1) - 1$ を計算すると $\square m + \square$ となり、これは $3(\square m + 1)$ の形にまとめられる。

mの係数

定数項

3($m+1$)の中の係数

計算スペース

12

等式（立方の和）

等式 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

n=1の左辺

n=1の右辺

n=3の右辺

計算スペース

記述式に挑戦（13～16） 仮定を使う変形の途中の数値を埋めよう

13

不等式（指数と2次式）

$n \geq 5$ を満たすすべての自然数 n について $2^n > n^2$ が成り立つことを証明する。 $n = 5$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。また、証明の途中で $2k^2 \geq (k+1)^2$ を示すには $k^2 - \square k - \square \geq 0$ ($k \geq 5$ で成立) を示せばよい。 $\square$ に当てはまる数を求めよ。

n=5の左辺

n=5の右辺

kの係数

定数項

計算スペース

倍数の証明

mの係数 定数項 $4(m+1)$ の中の係数

計算スペース

漸化式との融合

A= B= a4=

計算スペース

$a_1 = 2$ 、 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = 2^{n-1} + C$ の形に推測したとき、 C の値を求めよ。また a_5 の値を求めよ。

C=

a5=

計算スペース

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。一般項を推測してから証明する、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

漸化式（非斉次形）

$a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = 2a_n + n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = A \cdot 2^{n-1} - n - 1$ の形に推測したとき、 A の値を求めよ。また a_5 の値を求めよ。

A=

a5=

計算スペース

応2

不等式（階乗と指数）

$n! > 2^n$ が成り立つ最小の自然数 n を求め、その n 以上のすべての自然数で成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。まず、その最小の n （基準となる n ）における左辺・右辺の値を求めよ。

成り立つ最小の $n =$ そのときの左辺($n!$) = 右辺(2^n) =

計算スペース

応3

倍数の証明（発展）

すべての自然数 n について $7^n - 6n - 1$ は 36 の倍数であることを証明する。
 $n = 2, 3$ のときの値を求めよ。また、証明の途中で $7 \cdot 7^k = 7(36m + 6k + 1)$ を計算すると $252m + \square k + \square$ となり、最終的に $36(\square m + k)$ の形にまとめられる。 $\square$ に当てはまる数を求めよ。

$n=2$ の値 $n=3$ の値 k の係数 定数項

m の係数(まとめ後)

計算スペース

応4

漸化式（指数の項を含む）

$a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = n \cdot 2^{n-C}$ の形に推測したとき、 C の値を求めよ。また a_6 の値を求めよ。

$C =$ $a_6 =$

計算スペース

応5

不等式（評価・上からおさえる）

$n \geq 2$ を満たすすべての自然数 n について $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{D}{n}$ が成り立つ。この D の値を求めよ。また $n = 2$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。

$D =$ $n=2$ の左辺 $n=2$ の右辺

計算スペース