

数学的帰納法

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6） 等式の証明

1

等式（自然数の和）

等式 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 6$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 1 $n=1$ の右辺 1 $n=6$ の右辺 21

(i) $n = 1$: 左辺 = 1、右辺 = $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ 。一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ 。
両辺に $k+1$ を加えると $\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$
これは $n = k+1$ の場合の右辺と一致する。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で成り立つ** ($n=6$ の右辺は $\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$)

2

等式（奇数の和）

等式 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 5$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 1 $n=1$ の右辺 1 $n=5$ の右辺 25

(i) $n = 1$: 左辺 = 1、右辺 = $1^2 = 1$ 。一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ 。

両辺に、次の奇数 $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$ を加えると

$$k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

これは $n = k + 1$ の場合の右辺と一致する。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で成り立つ** ($n=5$ の右辺は $5^2 = 25$)

3

等式（偶数の和）

等式 $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 2 $n=1$ の右辺 2 $n=4$ の右辺 20

(i) $n = 1$: 左辺 = 2、右辺 = $1 \cdot 2 = 2$ 。一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $2 + 4 + \cdots + 2k = k(k + 1)$ 。

両辺に $2(k + 1)$ を加えると

$$k(k + 1) + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)$$

これは $n = k + 1$ の場合の右辺と一致する。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で成り立つ** ($n=4$ の右辺は $4 \cdot 5 = 20$)

等式 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を数学的帰納法で証明する。

$n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 1 $n=1$ の右辺 1 $n=3$ の右辺 14

(i) $n = 1$: 左辺 = 1、右辺 = $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$ 。一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $1^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ 。

両辺に $(k+1)^2$ を加えて通分し $(k+1)$ でくくると

$$\frac{(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

これは $n = k+1$ の場合の右辺と一致する。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で成り立つ** ($n=3$ の右辺は $\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = 14$)

等式 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ を数学的帰納法で証明する。

$n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 2 $n=1$ の右辺 2 $n=3$ の右辺 20

(i) $n = 1$: 左辺 = $1 \cdot 2 = 2$ 、右辺 = $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$ 。一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $1 \cdot 2 + \dots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ 。

両辺に $(k+1)(k+2)$ を加えて $(k+1)(k+2)$ でくくると

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2) \left(\frac{k}{3} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

これは $n = k+1$ の場合の右辺と一致する。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で成り立つ** ($n=3$ の右辺は $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} = 20$)

等式 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ を数学的帰納法で証明する。

$n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $\frac{1}{2}$ $n=1$ の右辺 $\frac{1}{2}$ $n=4$ の右辺 $\frac{4}{5}$

(i) $n = 1$: 左辺 = $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ 、右辺 = $\frac{1}{2}$ 。一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ 。

両辺に $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ を加えて通分すると

$$\begin{aligned} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \\ \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

これは $n = k + 1$ の場合の右辺と一致する。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で成り立つ** ($n=4$ の右辺は $\frac{4}{5} = 0.8$)

7

等式 (等比数列の和)

等式 $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 3 $n=1$ の右辺 3 $n=3$ の右辺 39

(i) $n = 1$: 左辺 = 3、右辺 = $\frac{9 - 3}{2} = 3$ 。一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $3 + 3^2 + \cdots + 3^k = \frac{3^{k+1} - 3}{2}$ 。

両辺に 3^{k+1} を加えると

$$\frac{3^{k+1} - 3}{2} + 3^{k+1} = \frac{3^{k+1} - 3 + 2 \cdot 3^{k+1}}{2} = \frac{3 \cdot 3^{k+1} - 3}{2} = \frac{3^{k+2} - 3}{2}$$

これは $n = k + 1$ の場合の右辺と一致する。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で成り立つ ($n=3$ の右辺は $\frac{81 - 3}{2} = 39$)**

8

不等式 (基本形)

不等式 $2^n \geq n + 1$ ($n \geq 1$) を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 2 $n=1$ の右辺 2 $n=4$ の左辺 16 $n=4$ の右辺 5

(i) $n = 1$: 左辺 = 2、右辺 = 2。 $2 \geq 2$ より成り立つ (等号成立)。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $2^k \geq k + 1$ 。

両辺を2倍すると $2^{k+1} \geq 2k + 2$

$k \geq 1$ より $2k + 2 \geq (k + 1) + 1$ ($2k + 2 - (k + 2) = k \geq 1 > 0$) なので

$$2^{k+1} \geq 2k + 2 \geq (k + 1) + 1$$

よって $n = k + 1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で $2^n \geq n + 1$ が成り立つ ($n=4$ では $16 \geq 5$)**

不等式 $3^n > 2n$ ($n \geq 1$) を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 4$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 3 $n=1$ の右辺 2 $n=4$ の左辺 81 $n=4$ の右辺 8

(i) $n = 1$: 左辺 = 3、右辺 = 2。 $3 > 2$ より成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $3^k > 2k$ 。

両辺を3倍すると $3^{k+1} > 6k$

$k \geq 1$ より $6k \geq 2k + 2 = 2(k + 1)$ ($6k - (2k + 2) = 4k - 2 \geq 2 > 0$) なの
で

$$3^{k+1} > 6k \geq 2(k + 1)$$

よって $n = k + 1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で $3^n > 2n$ が成り立つ** ($n=4$ では $81 > 8$)

すべての自然数 n について $n^3 - n$ は 6 の倍数であることを証明する過程の空欄を埋めよ。 $(k+1)^3 - (k+1)$ を展開して整理すると $(k^3 - k) + \square k^2 + \square k$ の形になる ($\square$ は同じ数)。また、この式が6の倍数だと示すには $k(k+1)$ が $\square$ の倍数であることを使う。

k^2 の係数 3 k の係数 3 $k(k+1)$ が 2 の倍数

(i) $n = 1 : 1^3 - 1 = 0$ 。0 は 6 の倍数だから成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定： $k^3 - k = 6m$ (m は整数) …(A)

$(k+1)^3 - (k+1)$ を展開する。

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = (k^3 - k) + 3k^2 + 3k$$

(A)を使って $k^3 - k = 6m$ を代入すると

$$= 6m + 3k^2 + 3k = 6m + 3k(k+1)$$

$k(k+1)$ は連続する2整数の積なので必ず偶数 (2 の倍数)。よって $3k(k+1)$ は 6 の倍数。

したがって $6m + 3k(k+1)$ 全体も 6 の倍数。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で $n^3 - n$ は6の倍数である**

すべての自然数 n について $4^n - 1$ は 3 の倍数であることを証明する過程の空欄を埋めよ。 $4^k - 1 = 3m$ とおくと、 $4^{k+1} - 1 = 4(3m + 1) - 1$ を計算すると $\square m + \square$ となり、これは $3(\square m + 1)$ の形にまとめられる。

mの係数 12 定数項 3 $3(\square m + 1)$ の中の係数 4

(i) $n = 1 : 4^1 - 1 = 3$ 。 3 は 3 の倍数だから成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定： $4^k - 1 = 3m$ 、すなわち $4^k = 3m + 1 \cdots (A)$
 $4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1$ に(A)を代入すると
 $= 4(3m + 1) - 1 = 12m + 4 - 1 = 12m + 3 = 3(4m + 1)$
 $4m + 1$ は整数だから、これは 3 の倍数である。

(i)(ii)より **すべての自然数nで $4^n - 1$ は3の倍数である**

等式 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 3$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 1 $n=1$ の右辺 1 $n=3$ の右辺 36

(i) $n = 1$: 左辺 = 1、右辺 = $\left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2 = 1$ 。一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $1^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2$ 。

両辺に $(k+1)^3$ を加えて $(k+1)^2$ でくくると

$$\begin{aligned} \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 &= (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + (k+1) \right) = (k+1)^2 \cdot \\ \frac{k^2 + 4k + 4}{4} &= (k+1)^2 \cdot \frac{(k+2)^2}{4} \\ &= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

これは $n = k+1$ の場合の右辺と一致する。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で成り立つ** ($n=3$ の右辺は $\left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)^2 = 36$)

13

不等式 (指数と2次式)

$n \geq 5$ を満たすすべての自然数 n について $2^n > n^2$ が成り立つことを証明する。
 $n = 5$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。また、証明の途中で $2k^2 \geq (k+1)^2$ を示すには $k^2 - \square k - \square \geq 0$ ($k \geq 5$ で成立) を示せばよい。 $\square$ に当てはまる数を求めよ。

$n=5$ の左辺 32 $n=5$ の右辺 25 k の係数 2 定数項 1

(i) $n = 5$: 左辺 $= 2^5 = 32$ 、右辺 $= 5^2 = 25$ 。 $32 > 25$ より成り立つ。

(ii) $k \geq 5$ として $n = k$ で成り立つと仮定 : $2^k > k^2 \cdots (A)$

(A) の両辺を2倍すると $2^{k+1} > 2k^2 \cdots (B)$

ここで $2k^2$ と $(k+1)^2$ を比較する。

$$2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1$$

$k \geq 5$ のとき $k^2 - 2k - 1 = (k-1)^2 - 2 \geq 16 - 2 = 14 > 0$ なので $2k^2 > (k+1)^2 \cdots (C)$

(B)、(C) より $2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$ 。

(i)(ii) より $n \geq 5$ のすべての自然数 n で $2^n > n^2$ が成り立つ

すべての自然数 n について $5^n - 1$ は 4 の倍数であることを証明する。 $5^k - 1 = 4m$ とおくと $5^{k+1} - 1 = 5(4m + 1) - 1$ を計算すると $\square m + \square$ となり、これは $4(\square m + 1)$ の形にまとめられる。 $\square$ に当てはまる数を求めよ。

mの係数 20 定数項 4 $4(m+1)$ の中の係数 5

(i) $n = 1 : 5^1 - 1 = 4$ 。4 は 4 の倍数だから成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定： $5^k - 1 = 4m$ 、すなわち $5^k = 4m + 1 \cdots (A)$

$5^{k+1} - 1 = 5 \cdot 5^k - 1$ に(A)を代入すると

$$= 5(4m + 1) - 1 = 20m + 5 - 1 = 20m + 4 = 4(5m + 1)$$

$5m + 1$ は整数だから、これは 4 の倍数である。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で $5^n - 1$ は4の倍数である**

$a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = 3a_n + 2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = A \cdot 3^{n-1} - B$ の形に推測したとき、 A 、 B の値を求めよ。また a_4 の値を求めよ。

A= 2 B= 1 a4= 53

項を計算する。 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ 、 $a_3 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$ 、 $a_4 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$ 。

それぞれに 1 を足すと 2, 6, 18, 54 となり、初項2、公比3の等比数列に見える。よって $a_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$ 、すなわち

推測： $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ (A=2, B=1)

数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1 : 2 \cdot 3^0 - 1 = 2 - 1 = 1$ 。 $a_1 = 1$ と一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定： $a_k = 2 \cdot 3^{k-1} - 1 \cdots (A)$

漸化式に(A)を代入すると

$$a_{k+1} = 3a_k + 2 = 3(2 \cdot 3^{k-1} - 1) + 2 = 2 \cdot 3^k - 3 + 2 = 2 \cdot 3^k - 1 = 2 \cdot 3^{(k+1)-1} - 1$$

これは推測した式で n を $k + 1$ に置き換えた式そのものである。

(i)(ii)より **すべての自然数nで $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ が成り立つ (a4=53)**

$a_1 = 2$ 、 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = 2^{n-1} + C$ の形に推測したとき、 C の値を求めよ。また a_5 の値を求めよ。

$$C = \underline{1} \quad a_5 = \underline{17}$$

項を計算する。 $a_1 = 2$ 、 $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ 、 $a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ 、 $a_4 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$ 、 $a_5 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$ 。

それぞれから 1 を引くと 1, 2, 4, 8, 16 となり、初項1、公比2の等比数列に見える。よって $a_n - 1 = 2^{n-1}$ 、すなわち

推測： $a_n = 2^{n-1} + 1$ ($C=1$)

数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1 : 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$ 。 $a_1 = 2$ と一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定： $a_k = 2^{k-1} + 1 \cdots (A)$

漸化式に(A)を代入すると

$$a_{k+1} = 2a_k - 1 = 2(2^{k-1} + 1) - 1 = 2^k + 2 - 1 = 2^k + 1 = 2^{(k+1)-1} + 1$$

これは推測した式で n を $k + 1$ に置き換えた式そのものである。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で $a_n = 2^{n-1} + 1$ が成り立つ ($a_5=17$)**

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。一般項を推測してから証明する、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

漸化式（非斉次形）

$a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = 2a_n + n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = A \cdot 2^{n-1} - n - 1$ の形に推測したとき、 A の値を求めよ。また a_5 の値を求めよ。

A= 3 a_5 = 42

項を計算する。 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ 、 $a_3 = 2 \cdot 3 + 2 = 8$ 、 $a_4 = 2 \cdot 8 + 3 = 19$ 、 $a_5 = 2 \cdot 19 + 4 = 42$ 。

一般項を $a_n = A \cdot 2^{n-1} - n - 1$ の形と推測して係数を求める。 $n = 1$ を代入すると $a_1 = A - 1 - 1 = A - 2$ 。これが 1 に等しいので $A = 3$ 。実際に $n = 2$ で確認すると $3 \cdot 2 - 2 - 1 = 6 - 3 = 3$ となり $a_2 = 3$ と一致する。

推測： $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$ (**A=3**)

数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1$: $3 \cdot 2^0 - 1 - 1 = 3 - 2 = 1$ 。 $a_1 = 1$ と一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定： $a_k = 3 \cdot 2^{k-1} - k - 1 \cdots (A)$

漸化式 $a_{k+1} = 2a_k + k$ に(A)を代入すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2(3 \cdot 2^{k-1} - k - 1) + k = 3 \cdot 2^k - 2k - 2 + k = 3 \cdot 2^k - k - 2 \\ &= 3 \cdot 2^{(k+1)-1} - (k+1) - 1 \end{aligned}$$

これは推測した式で n を $k+1$ に置き換えた式そのものである。

(i)(ii)より **すべての自然数nで** $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$ **が成り立つ (a5=42)**

$n! > 2^n$ が成り立つ最小の自然数 n を求め、その n 以上のすべての自然数で成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。まず、その最小の n （基準となる n ）における左辺・右辺の値を求めよ。

成り立つ最小の $n =$ 4 そのときの左辺($n!$)=24 右辺(2^n)=16

$n = 1 : 1! = 1, 2^1 = 2 \rightarrow 1 > 2$ は不成立。

$n = 2 : 2! = 2, 2^2 = 4 \rightarrow$ 不成立。

$n = 3 : 3! = 6, 2^3 = 8 \rightarrow$ 不成立。

$n = 4 : 4! = 24, 2^4 = 16 \rightarrow 24 > 16$ で成立。

よって成り立つ最小の自然数は $n = 4$ 。

(i) $n = 4$: 上で確認した通り $24 > 16$ より成り立つ。

(ii) $k \geq 4$ として $n = k$ で成り立つと仮定： $k! > 2^k \cdots (A)$

$(k+1)! = (k+1) \cdot k!$ に(A)を使うと

$(k+1)! > (k+1) \cdot 2^k$

$k \geq 4$ より $k+1 \geq 5 > 2$ なので $(k+1) \cdot 2^k > 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

よって $(k+1)! > (k+1) \cdot 2^k > 2^{k+1}$ 、つまり $(k+1)! > 2^{k+1}$ 。

(i)(ii)より **$n \geq 4$ のすべての自然数 n で $n! > 2^n$ が成り立つ（最小の n は4）**

すべての自然数 n について $7^n - 6n - 1$ は 36 の倍数であることを証明する。

$n = 2, 3$ のときの値を求めよ。また、証明の途中で $7 \cdot 7^k = 7(36m + 6k + 1)$ を計算すると $252m + \square k + \square$ となり、最終的に $36(\square m + k)$ の形にまとめられる。 $\square$ に当てはまる数を求めよ。

$n=2$ の値 36

$n=3$ の値 324

k の係数 42

定数項 7

m の係数(まとめ後) 7

$n = 1 : 7 - 6 - 1 = 0$ 。0 は 36 の倍数だから成り立つ（確認として $n = 2, 3$ も計算しておく： $n = 2$ は $49 - 12 - 1 = 36$ 、 $n = 3$ は $343 - 18 - 1 = 324 = 36 \times 9$ ）。

(i) $n = 1$: 上で確認した通り 0 は 36 の倍数なので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定： $7^k - 6k - 1 = 36m$ 、すなわち $7^k = 36m + 6k + 1 \cdots (A)$

$7^{k+1} - 6(k+1) - 1$ を変形する。

$$= 7 \cdot 7^k - 6k - 6 - 1 = 7 \cdot 7^k - 6k - 7$$

(A)を使って $7^k = 36m + 6k + 1$ を代入すると

$$7 \cdot 7^k = 7(36m + 6k + 1) = 252m + 42k + 7$$

よって

$$7^{k+1} - 6(k+1) - 1 = 252m + 42k + 7 - 6k - 7 = 252m + 36k = 36(7m + k)$$

$7m + k$ は整数だから、これは 36 の倍数である。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で $7^n - 6n - 1$ は36の倍数である**

$a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = n \cdot 2^{n-C}$ の形に推測したとき、 C の値を求めよ。また a_6 の値を求めよ。

$C = \underline{1}$ $a_6 = \underline{192}$

項を計算する。 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ 、 $a_3 = 2 \cdot 4 + 4 = 12$ 、 $a_4 = 2 \cdot 12 + 8 = 32$ 、 $a_5 = 2 \cdot 32 + 16 = 80$ 、 $a_6 = 2 \cdot 80 + 32 = 192$ 。

$a_n \div n$ を計算すると 1, 2, 4, 8, 16, 32 となり、これは 2^{n-1} に見える。よって $a_n = n \cdot 2^{n-1}$ 、すなわち

推測： $a_n = n \cdot 2^{n-1}$ ($C=1$)

数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1$: $1 \cdot 2^0 = 1$ 。 $a_1 = 1$ と一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定： $a_k = k \cdot 2^{k-1} \dots (A)$

漸化式 $a_{k+1} = 2a_k + 2^k$ に(A)を代入すると

$$a_{k+1} = 2 \cdot k \cdot 2^{k-1} + 2^k = k \cdot 2^k + 2^k = (k+1) \cdot 2^k = (k+1) \cdot 2^{(k+1)-1}$$

これは推測した式で n を $k+1$ に置き換えた式そのものである。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で $a_n = n \cdot 2^{n-1}$ が成り立つ** ($a_6=192$)

$n \geq 2$ を満たすすべての自然数 n について $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{D}{n}$ が成り立つ。この D の値を求めよ。また $n = 2$ のときの左辺・右辺の値を求めよ。

D= 1 $n=2$ の左辺 5/4 $n=2$ の右辺 3/2

右辺は $2 - \frac{1}{n}$ の形 ($D = 1$) と推測する。 $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ とおく。

(i) $n = 2$: $S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ 、右辺 $= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 。 $\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ より成り立つ。

(ii) $k \geq 2$ として $n = k$ で成り立つと仮定 : $S_k < 2 - \frac{1}{k}$ …(A)

(A)の両辺に $\frac{1}{(k+1)^2}$ を加えると

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

ここで $2 - \frac{1}{k+1}$ 以下になることを示したい。差を計算する。

$$\left(2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) - \left(2 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k(k+1)}$$

$(k+1)^2 > k(k+1)$ ($k+1 > k$ だから) なので $\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k(k+1)}$ 、よって

この差は負。

$$\text{つまり } 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

したがって $S_{k+1} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$ 、つまり $S_{k+1} < 2 - \frac{1}{k+1}$ 。
。

(i)(ii)より $n \geq 2$ のすべての自然数 n で $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ が成り立つ (D=1)