

漸化式

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～5）

1

等差型

$a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + 3$ の一般項を $a_n = pn + q$ の形で表すとき、 p, q を求めよ。

$p = \underline{3} \quad q = \underline{2}$

等差型なので $a_n = a_1 + (n - 1)d = 5 + 3(n - 1) = 3n + 2$ 。

$p = 3, q = 2$

2

等比型

$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$ の一般項を $a_n = A \cdot r^{n-1}$ の形で表すとき、 A, r を求めよ。

$$A = \underline{2} \quad r = \underline{3}$$

等比型なので $a_n = a_1 r^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$ 。

$$A = 2, r = 3$$

3

等比型・分数

$a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ のとき、 a_5 を求めよ。

$$a_5 = \underline{1/4}$$

$$a_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ より } a_5 = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}。$$

$$a_5 = \frac{1}{4}$$

4

階差型・項をたどる

$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2n$ のとき、 a_4, a_5 を求めよ。

$$a_4 = \underline{13} \quad a_5 = \underline{21}$$

$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 = 3, a_3 = a_2 + 2 \cdot 2 = 7, a_4 = a_3 + 2 \cdot 3 = 13, a_5 = a_4 + 2 \cdot 4 = 21。$$

$$a_4 = 13, a_5 = 21$$

5

 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型・基本

$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ について、特性方程式の解 α と a_4 を求めよ。

$$\alpha = \underline{-1} \quad a_4 = \underline{15}$$

$\alpha = 2\alpha + 1$ より $\alpha = -1$ 。 $a_n + 1 = (a_1 + 1)2^{n-1} = 2^n$ より $a_n = 2^n - 1$ 。
 $a_4 = 2^4 - 1 = 15$ 。

$$\alpha = -1, a_4 = 15$$

標準 (6~12) ※パターンは自分で判定

6 $a_1 = 5, a_{n+1} = 3a_n - 4$ について、特性方程式の解 α と a_4 を求めよ。

$$\alpha = \underline{2} \quad a_4 = \underline{83}$$

$\alpha = 3\alpha - 4$ より $-2\alpha = -4, \alpha = 2$ 。 $a_n - 2 = (a_1 - 2)3^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$
 より $a_n = 3^n + 2$ 。 $a_4 = 3^4 + 2 = 83$ 。

$$\alpha = 2, a_4 = 83$$

7 $a_1 = 0, a_{n+1} = 4a_n + 3$ について、特性方程式の解 α と a_5 を求めよ。

$$\alpha = \underline{-1} \quad a_5 = \underline{255}$$

$\alpha = 4\alpha + 3$ より $-3\alpha = 3, \alpha = -1$ 。 $a_n + 1 = (a_1 + 1)4^{n-1} = 4^{n-1}$ より
 $a_n = 4^{n-1} - 1$ 。 $a_5 = 4^4 - 1 = 255$ 。

$$\alpha = -1, a_5 = 255$$

$a_1 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ の一般項を $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$ の形で表すとき、 A , B を求めよ。

$$A = \underline{1} \quad B = \underline{1}$$

両辺を 3^{n+1} で割り $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}$ 。特性方程式 $\beta = \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}$ より $\beta = 1$ 。

$$b_1 = \frac{5}{3} \text{ より } b_n - 1 = \left(\frac{5}{3} - 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n。$$

$$b_n = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad a_n = 3^n b_n = 3^n + 2^n。$$

$$A = 1, B = 1 \quad (a_n = 2^n + 3^n)$$

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 4^n$ の一般項を $a_n = A \cdot 4^n + B \cdot 3^n$ の形で表すとき、 A , B と a_4 を求めよ。

$$A = \underline{1} \quad B = \underline{-1} \quad a_4 = \underline{175}$$

両辺を 4^{n+1} で割り $b_n = \frac{a_n}{4^n}$ とおくと $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}$ 。特性方程式より $\beta = 1$ 。

$$b_1 = \frac{1}{4} \text{ より } b_n - 1 = \left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = -\frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = -\left(\frac{3}{4}\right)^n。$$

$$b_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad a_n = 4^n b_n = 4^n - 3^n。 \quad a_4 = 4^4 - 3^4 = 256 - 81 = 175。$$

$$A = 1, B = -1, a_4 = 175 \quad (a_n = 4^n - 3^n)$$

10

階差型・Σの技術を使う

$a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 3n - 1$ のとき、 a_6 を求めよ。

$$a_6 = \underline{43}$$

$$a_2 = 3 + (3 \cdot 1 - 1) = 5, a_3 = 5 + (3 \cdot 2 - 1) = 10, a_4 = 10 + (3 \cdot 3 - 1) = 18, a_5 = 18 + (3 \cdot 4 - 1) = 29, a_6 = 29 + (3 \cdot 5 - 1) = 43.$$

$$(\text{一般項も } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 1) \text{ から求められ、} a_n = \frac{3n^2 - 5n + 8}{2} \text{ になる。}$$

$$n = 6 \text{ を代入すると } \frac{108 - 30 + 8}{2} = 43 \text{ と一致する。})$$

$$a_6 = 43$$

11

$a_1 = 7$, $a_{n+1} = 5a_n - 8$ について、特性方程式の解 α と a_4 を求めよ。

$$\alpha = \underline{2} \quad a_4 = \underline{627}$$

$$\alpha = 5\alpha - 8 \text{ より } -4\alpha = -8, \alpha = 2. a_n - 2 = (a_1 - 2)5^{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1} = 5^n$$

$$\text{より } a_n = 5^n + 2. a_4 = 5^4 + 2 = 627.$$

$$\alpha = 2, a_4 = 627$$

12

おきかえ型

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ のとき、 a_5 を求めよ。

$$a_5 = \underline{211}$$

$$\text{STEP 3の例題より } a_n = 3^n - 2^n. a_5 = 3^5 - 2^5 = 243 - 32 = 211.$$

$$(\text{直接たどっても } a_2 = 5, a_3 = 19, a_4 = 65, a_5 = 2 \cdot 65 + 3^4 = 130 + 81 = 211 \text{ と一致する。})$$

$$a_5 = 211$$

挑戦 (13~16)

13

特性方程式の解が負の型

$a_1 = 2, a_{n+1} = -2a_n + 3$ について、特性方程式の解 α と a_5 を求めよ。

$$\alpha = \underline{1} \quad a_5 = \underline{17}$$

$\alpha = -2\alpha + 3$ より $3\alpha = 3, \alpha = 1$ 。 $a_n - 1 = (a_1 - 1)(-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$ より $a_n = (-2)^{n-1} + 1$ 。

$a_5 = (-2)^4 + 1 = 16 + 1 = 17$ 。公比が負なので符号が交互に入れ替わることに注意。

$$\alpha = 1, a_5 = 17$$

14

特性方程式の解と初項が一致する特殊ケース

$a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - 3$ のとき、 a_{10} を求めよ。

$$a_{10} = \underline{3}$$

特性方程式 $\alpha = 2\alpha - 3$ より $\alpha = 3$ 。ところが初項がすでに $a_1 = 3 = \alpha$ 。

$a_n - 3 = (a_1 - 3)2^{n-1} = 0 \cdot 2^{n-1} = 0$ なので、 $a_n = 3$ がすべての n で成り立つ (定数列)。

実際に $a_2 = 2 \cdot 3 - 3 = 3, a_3 = 2 \cdot 3 - 3 = 3, \dots$ と、ずっと 3 のまま変わらない。

$$a_{10} = 3$$

15

おきかえ型・係数つき

$a_1 = 7, a_{n+1} = 5a_n + 2 \cdot 3^n$ の一般項を $a_n = A \cdot 5^n + B \cdot 3^n$ の形で表すとき、 A, B と a_4 を求めよ。

$$A = \underline{2} \quad B = \underline{-1} \quad a_4 = \underline{1169}$$

両辺を 3^{n+1} で割り $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと $b_{n+1} = \frac{5}{3}b_n + \frac{2}{3}$ 。特性方程式 $\beta = \frac{5}{3}\beta + \frac{2}{3}$ より $-\frac{2}{3}\beta = \frac{2}{3}, \beta = -1$ 。

$$b_1 = \frac{7}{3} \text{ より } b_n - (-1) = \left(\frac{5}{3} + 1\right) \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} = \frac{10}{3} \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} = 2 \left(\frac{5}{3}\right)^n。$$

$$b_n = 2 \left(\frac{5}{3}\right)^n - 1, a_n = 3^n b_n = 2 \cdot 5^n - 3^n。$$

$$a_4 = 2 \cdot 5^4 - 3^4 = 2 \cdot 625 - 81 = 1250 - 81 = 1169。$$

$$A = 2, B = -1, a_4 = 1169 \quad (a_n = 2 \cdot 5^n - 3^n)$$

16

階差型・一般項を最後まで求める

$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 4n - 1$ の一般項を $a_n = An^2 + Bn + C$ の形で表すとき、 A, B, C を求めよ。

$$A = \underline{2} \quad B = \underline{-3} \quad C = \underline{3}$$

$$n \geq 2 \text{ で } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 1) = 2 + 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) = 2 + (n-1)(2n-1)$$

$$(n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1 \text{ より } a_n = 2 + 2n^2 - 3n + 1 = 2n^2 - 3n + 3。$$

$n = 1$ を代入すると $2 - 3 + 3 = 2 = a_1$ となり成り立つ。検算： $a_2 = 2 + 3 = 5$ 、公式も $8 - 6 + 3 = 5$ 。

$$A = 2, B = -3, C = 3 \quad (a_n = 2n^2 - 3n + 3)$$

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。隣接3項間の漸化式と確率漸化式の入り口を紹介する。

応1

隣接3項間漸化式（入り口）

$a_1 = 2, a_2 = 5, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ の一般項を求め、 a_5 を求めよ。

$a_5 = \underline{97}$

3つの項が並ぶ漸化式（隣接3項間）は、 $x^2 = 5x - 6$ （特性方程式）を作って解くのが基本方針。

$x^2 - 5x + 6 = 0$ を解くと $(x - 2)(x - 3) = 0$ より $x = 2, 3$ 。この2つの解 2, 3 を使って、一般項は

$$a_n = A \cdot 2^{n-1} + B \cdot 3^{n-1}$$

の形で書けることが知られている（詳しい理由は数列をさらに深く学ぶ機会に扱う。

ここでは「2つの特性方程式の解を使って一般項を組み立てる」という考え方だけつかんでおこう）。

$n = 1, 2$ を代入して A, B を決める。

$$a_1 = A + B = 2$$

$$a_2 = 2A + 3B = 5$$

1つ目の式より $A = 2 - B$ 。2つ目に代入すると $2(2 - B) + 3B = 5$ より $4 + B = 5, B = 1$ 。よって $A = 1$ 。

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} + 1 \cdot 3^{n-1} = 2^{n-1} + 3^{n-1}$$

検算： $a_3 = 5a_2 - 6a_1 = 25 - 12 = 13$ 。公式も $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ で一致。

$a_4 = 5 \cdot 13 - 6 \cdot 5 = 65 - 30 = 35$ 。公式も $2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$ で一致。

$a_5 = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 13 = 175 - 78 = 97$ 。公式も $2^4 + 3^4 = 16 + 81 = 97$ 。

$$a_n = 2^{n-1} + 3^{n-1}, a_5 = 97$$

正三角形ABCの頂点上を動く点Pがある。点Pは最初、頂点Aにいる。1回の操作で、今いる頂点から他の2頂点のどちらかへ、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で移動する。 n 回の操作のあとに点PがAにいる確率を p_n とするとき、 p_1 を求めよ。また p_{n+1} を p_n の式 ($p_{n+1} = Ap_n + B$ の形) で表せ。

$$p_1 = \underline{0} \quad A = \underline{-1/2} \quad B = \underline{1/2}$$

1回操作すると、最初Aにいた点Pは必ずBかCへ移動するので、1回後にAにいる確率は $p_1 = 0$ 。

($n + 1$) 回後にAにいる場合を、「 n 回後にどこにいたか」で場合分けする。

・ n 回後にAにいた（確率 p_n ）→ 次はB・Cのどちらかへ移動するので、Aには**戻れない**。この場合からの寄与は 0。

・ n 回後にAにいなかった（確率 $1 - p_n$ ）→ 今いる頂点から見て、他の2頂点のうち1つがAなので、確率 $\frac{1}{2}$ でAに移動する。

$$\text{したがって } p_{n+1} = 0 \cdot p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n) = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}。$$

（発展：この式もSTEP 2の特性方程式で解ける。 $\alpha = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}$ より $\alpha = \frac{1}{3}$ 。

$p_1 = 0$ から出発して $p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ が得られ、 n が大きくなるほど p_n は $\frac{1}{3}$ に近づいていく。）

$$p_1 = 0, \quad p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$

平面上に n 個の円があり、どの2つの円も異なる2点で交わり、どの3つの円も1点で交わらないとする。この n 個の円によって平面が分けられる部分の数を a_n とする。一般項を $a_n = An^2 + Bn + C$ の形で求め、 a_6 を求めよ。

$$A = \underline{1} \quad B = \underline{-1} \quad C = \underline{2} \quad a_6 = \underline{32}$$

円が1個もないとき平面は1つの部分。円を1個かくと内側・外側の2つに分かれるので $a_1 = 2$ 。

n 個の円がある状態から $(n+1)$ 個目の円を加えると、条件より新しい円は既存の n 個の円それぞれと2点で交わるので、交点は $2n$ 個できる。この $2n$ 個の交点によって、新しい円自身は $2n$ 個の弧に分けられる。1つの弧が既存の領域を1つ2つに分けるので、増える領域の数は $2n$ 。

$$a_{n+1} = a_n + 2n \quad (\text{階差型})$$

$$n \geq 2 \text{ で } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2$$

。

$n = 1$ でも $1 - 1 + 2 = 2$ となり一致する。

検算： $a_2 = 4 - 2 + 2 = 4$ (2つの円が重なるベン図と同じ形)。 $a_3 = 9 - 3 + 2 = 8$ 。

$$a_6 = 36 - 6 + 2 = 32。$$

$$A = 1, B = -1, C = 2 \quad (a_n = n^2 - n + 2), a_6 = 32$$

応4

文章題：培養液の中の細菌

ある培養液の中の細菌の数は、1時間ごとに2倍に増えるが、同時に薬剤の投与により毎回3匹ずつ減らされる。1時間後の細菌の数が5匹であるとき、 n 時間後の細菌の数を a_n (匹) とする。一般項を $a_n = 2^n + c$ の形で求め、10時間後の細菌の数を求めよ。

$c = \underline{3}$ 10時間後 $\underline{1027}$ 匹

条件を式にすると $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$ 。

特性方程式 $\alpha = 2\alpha - 3$ より $\alpha = 3$ 。 $a_n - 3 = (a_1 - 3)2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ より $a_n = 2^n + 3$ 。

検算： $a_1 = 2 + 3 = 5$ (条件と一致)、 $a_2 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$ 、公式も $4 + 3 = 7$ 。

$a_{10} = 2^{10} + 3 = 1024 + 3 = 1027$ 。

$c = 3$ ($a_n = 2^n + 3$)、10時間後は1027匹

応5

初項・公比・定数がすべて負を含む型

$a_1 = -2$, $a_{n+1} = -3a_n + 8$ について、特性方程式の解 α と a_4 を求めよ。

$\alpha = \underline{2}$ $a_4 = \underline{110}$

特性方程式 $\alpha = -3\alpha + 8$ より $4\alpha = 8$, $\alpha = 2$ 。

$a_n - 2 = (a_1 - 2)(-3)^{n-1} = (-2 - 2)(-3)^{n-1} = -4(-3)^{n-1}$ より $a_n = 2 - 4(-3)^{n-1}$ 。

検算： $a_1 = 2 - 4 = -2$ (条件と一致)、 $a_2 = -3 \cdot (-2) + 8 = 6 + 8 = 14$ 、公式も $2 - 4(-3) = 2 + 12 = 14$ 。

$a_3 = -3 \cdot 14 + 8 = -34$ 、公式も $2 - 4 \cdot 9 = 2 - 36 = -34$ 。

$a_4 = -3 \cdot (-34) + 8 = 102 + 8 = 110$ 、公式も $2 - 4(-27) = 2 + 108 = 110$ 。

$\alpha = 2$, $a_4 = 110$