

いろいろな数列と Σ

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～6）

1

Σk の基本公式

$\sum_{k=1}^5 k$ の値を求めよ。

値 15

$$\sum_{k=1}^5 k = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$$

15

2

 Σk の基本公式

$\sum_{k=1}^7 k$ の値を求めよ。

値 28

$$\sum_{k=1}^7 k = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 = 28$$

28

3

 Σk^2 の基本公式

$\sum_{k=1}^4 k^2$ の値を求めよ。

値 30

$$\sum_{k=1}^4 k^2 = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 = 30$$

30

4

 Σk^2 の基本公式

$\sum_{k=1}^5 k^2$ の値を求めよ。

値 55

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 = 55$$

55

5

 Σk^3 の基本公式

$\sum_{k=1}^3 k^3$ の値を求めよ。

値 36

$$\sum_{k=1}^3 k^3 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\right)^2 = 6^2 = 36$$

36

6

定数の和

$\sum_{k=1}^5 4$ の値を求めよ。

値 20

k に関係ない定数4を5個足すだけ。 $\sum_{k=1}^5 4 = 5 \times 4 = 20$

20

標準 (7~14)

7

$\sum_{k=1}^6 k^2$ の値を求めよ。

値 91

$$\sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 = 91$$

91

8 $\sum_{k=1}^4 k^3$ の値を求めよ。

値 100

$$\sum_{k=1}^4 k^3 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5\right)^2 = 10^2 = 100$$

100

9 2項に分けて計算

$\sum_{k=1}^4 (2k + 1)$ の値を求めよ。

値 24

$$\sum_{k=1}^4 (2k + 1) = 2 \sum_{k=1}^4 k + \sum_{k=1}^4 1 = 2 \cdot 10 + 4 = 24$$

24

10 2項に分けて計算

$\sum_{k=1}^5 (3k - 2)$ の値を求めよ。

値 35

$$\sum_{k=1}^5 (3k - 2) = 3 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 2 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 5 = 45 - 10 = 35$$

35

11

展開してからΣ

$\sum_{k=1}^4 k(k+1)$ の値を求めよ。

値 40

$$k(k+1) = k^2 + k \text{ なので } \sum_{k=1}^4 (k^2 + k) = 30 + 10 = 40$$

40

12

展開してからΣ

$\sum_{k=1}^5 (k^2 - k)$ の値を求めよ。

値 40

$$\sum_{k=1}^5 (k^2 - k) = \sum_{k=1}^5 k^2 - \sum_{k=1}^5 k = 55 - 15 = 40$$

40

13

2項に分けて計算

$\sum_{k=1}^3 (2k^2 + 1)$ の値を求めよ。

値 31

$$\sum_{k=1}^3 (2k^2 + 1) = 2 \sum_{k=1}^3 k^2 + \sum_{k=1}^3 1 = 2 \cdot 14 + 3 = 31$$

31

14

3項に分けて計算

$\sum_{k=1}^4 (k^3 - k)$ の値を求めよ。

値 90

$$\sum_{k=1}^4 (k^3 - k) = \sum_{k=1}^4 k^3 - \sum_{k=1}^4 k = 100 - 10 = 90$$

90

挑戦 (15~18)

15

一般項の係数を求める

$\sum_{k=1}^n (4k - 1)$ を計算すると $an^2 + bn + c$ の形になる。係数 a, b, c を求めよ。

$a = \underline{2} \quad b = \underline{1} \quad c = \underline{0}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (4k - 1) &= 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 4 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n = 2n(n+1) - n = \\ &2n^2 + 2n - n = 2n^2 + n \end{aligned}$$

検算 ($n = 3$) : 与式は $(4 \cdot 1 - 1) + (4 \cdot 2 - 1) + (4 \cdot 3 - 1) = 3 + 7 + 11 = 21$ 。式に $n = 3$ を代入すると $2 \cdot 9 + 3 = 21$ で一致。

$2n^2 + n$ ($a = 2, b = 1, c = 0$)

$\sum_{k=1}^n (6k^2 - 2k + 3)$ を計算すると $an^3 + bn^2 + cn + d$ の形になる。係数

a, b, c, d を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{2} \quad c = \underline{3} \quad d = \underline{0}$$

$$\sum_{k=1}^n (6k^2 - 2k + 3) = 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + 3n = 6 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 3n$$

$$= n(n+1)(2n+1) - n(n+1) + 3n$$

$n(n+1)(2n+1) = 2n^3 + 3n^2 + n$ を代入すると

$$= (2n^3 + 3n^2 + n) - (n^2 + n) + 3n = 2n^3 + 2n^2 + 3n$$

検算 ($n = 2$) : 与式は $(6 - 2 + 3) + (24 - 4 + 3) = 7 + 23 = 30$ 。式に $n = 2$ を代入すると $16 + 8 + 6 = 30$ で一致。

$$2n^3 + 2n^2 + 3n \quad (a = 2, b = 2, c = 3, d = 0)$$

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1$ 、階差数列 $b_n = 3n - 1$ ($b_n = a_{n+1} - a_n$) を満たす。 a_5 の値を求めよ。

$$a_5 = \underline{27}$$

$$a_5 = a_1 + \sum_{k=1}^4 b_k = 1 + \sum_{k=1}^4 (3k - 1) = 1 + \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 - 4 \right) = 1 + (30 - 4) = 27$$

検算 (1歩ずつ) : $a_1 = 1$ 、 $a_2 = a_1 + b_1 = 1 + 2 = 3$ 、 $a_3 = a_2 + b_2 = 3 + 5 = 8$ 、 $a_4 = a_3 + b_3 = 8 + 8 = 16$ 、 $a_5 = a_4 + b_4 = 16 + 11 = 27$ 。一致する。

$$a_5 = 27$$

$\sum_{k=1}^6 \frac{1}{k(k+1)}$ の値を求めよ。

$$\text{値 } \underline{6/7}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ に } n = 6 \text{ を代入する。}$$

$$\frac{6}{6+1} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{6}{7}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。等差×等比の和や群数列の入り口など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

$S = \sum_{k=1}^5 k \cdot 2^k$ の値を求めよ。 $(S - 2S)$ を作る方法を使うこと)

$$S = \underline{258}$$

一般に $S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$ は「等差数列 k 」×「等比数列 2^k 」の和なので、公比2をかけたものとの差をとる $(S - 2S)$ 。

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n \\ 2S_n &= \quad \quad 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} \end{aligned}$$

上の式から下の式を引くと、真ん中の項は $2^2, 2^3, \dots, 2^n$ の係数がすべて1ずつ減って重なるので

$$S_n - 2S_n = 1 \cdot 2^1 + (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - n \cdot 2^{n+1}$$

$2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 4$ （初項4・公比2・項数 $n-1$ の等比数列の和）なので

$$-S_n = 2 + (2^{n+1} - 4) - n \cdot 2^{n+1} = (1-n)2^{n+1} - 2$$

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

$$n=5 \text{ を代入: } S_5 = (5-1) \cdot 2^6 + 2 = 4 \cdot 64 + 2 = 258$$

検算（直接計算）： $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 32 = 2 + 8 + 24 + 64 + 160 = 258$ 。一致する。

$$S = 258$$

自然数を次のように群に分ける（第 n 群には n 個の数が入る）。

第1群 {1} 第2群 {2, 3} 第3群 {4, 5, 6} 第4群 {7, 8, 9, 10} ……

20 はどの群の何番目に入るか求めよ。

第 6 群の 第 5 番目

第 n 群までに並ぶ数の総数は $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 個。

$n = 5$ まで： $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$ 個（最後の数は15）

$n = 6$ まで： $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 21$ 個（最後の数は21）

よって第6群は 16, 17, 18, 19, 20, 21 の6個で構成される。20 はこの中の $20 - 15 = 5$ 番目。

第6群の第5番目

$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$ を用いて $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k(k+2)}$ の値を求めよ。

値 25/42

k が2つ飛びでずれるので、打ち消し合わずに残る項が最初と最後にそれぞれ2つずつ出ることに注意する。

$$\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right\}$$

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ が打ち消し合って消え、残るのは $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}$ (最初の2つ) と $-\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}$ (最後の2つ)。

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{13}{42} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{63 - 13}{42} = \frac{1}{2} \cdot \frac{50}{42} = \frac{25}{42}$$

検算 (直接計算): $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} \approx 0.3333 + 0.125 + 0.0667 + 0.0417 + 0.0286 = 0.5952 \dots$ 、 $\frac{25}{42} = 0.5952 \dots$ で一致。

25
42

$\sum_{k=1}^6 (2k-1)^2$ (奇数 $1^2, 3^2, 5^2, \dots$ の和) の値を求めよ。

値 286

$(2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$ と展開してから分ける。

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + n = 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n$$

$$= \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$$

$$\text{通分してまとめると} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \quad (\text{奇数の2乗和の公式})$$

$$n=6 \text{ を代入: } \frac{6 \cdot 11 \cdot 13}{3} = \frac{858}{3} = 286$$

検算 (直接計算): $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 = 1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121 = 286$ 。一致する。

286

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 3$ 、階差数列 $b_n = n^2$ ($b_n = a_{n+1} - a_n$) を満たす。 a_5 の値を求めよ。

$$a_5 = \underline{33}$$

$$a_5 = a_1 + \sum_{k=1}^4 b_k = 3 + \sum_{k=1}^4 k^2 = 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 = 3 + 30 = 33$$

検算 (1歩ずつ) : $a_1 = 3$ 、 $a_2 = a_1 + 1^2 = 4$ 、 $a_3 = a_2 + 2^2 = 8$ 、 $a_4 = a_3 + 3^2 = 17$ 、 $a_5 = a_4 + 4^2 = 33$ 。一致する。

$$a_5 = 33$$