

等比数列

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～8）

1

第n項を求める

初項5、公比3の等比数列の第4項を求めよ。

第4項 135

一般項は $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ 。

$$a_4 = 5 \times 3^3 = 5 \times 27 = 135$$

第4項は 135

2

第n項を求める・公比が負

初項2、公比 -2 の等比数列の第5項を求めよ。

第5項 32

$$a_5 = 2 \times (-2)^4 = 2 \times 16 = 32$$

第5項は 32

3

第n項を求める・公比が分数

初項81、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列の第4項を求めよ。

第4項 3

$$a_4 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{81}{27} = 3$$

第4項は 3

4

数列から読み取る

数列 4, 8, 16, 32, ... の第6項を求めよ。

第6項 128

初項 4、公比 2 と読み取れる。

$$a_6 = 4 \times 2^5 = 4 \times 32 = 128$$

第6項は 128

5

公比を求める

数列 100, -50, 25, $-\frac{25}{2}$, ... の公比を求めよ。

公比 $-\frac{1}{2}$

隣り合う項の比を計算する。

$$-50 \div 100 = -\frac{1}{2}, \quad 25 \div (-50) = -\frac{1}{2} \quad (\text{どこで確認しても同じ値になる})$$

公比は $-\frac{1}{2}$

6

和を求める

初項3、公比2の等比数列の初項から第4項までの和 S_4 を求めよ。

$$S_4 = \underline{45}$$

$$S_4 = \frac{3(2^4 - 1)}{2 - 1} = 3 \times 15 = 45$$

$$\text{検算：} 3 + 6 + 12 + 24 = 45$$

$$S_4 = 45$$

7

和を求める・公比が負

初項6、公比 -2 の等比数列の初項から第4項までの和 S_4 を求めよ。

$$S_4 = \underline{-30}$$

$$S_4 = \frac{6((-2)^4 - 1)}{-2 - 1} = \frac{6 \times 15}{-3} = \frac{90}{-3} = -30$$

$$\text{検算：} 6 - 12 + 24 - 48 = -30$$

$$S_4 = -30$$

8

公比が1のとき

すべての項が5である数列（公比1の等比数列）の初項から第10項までの和を求めよ。

$$\text{和 } \underline{50}$$

公比が1のときは公式 $\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ が使えない（分母が0）。すべての項が5なので、単純に

$$S_{10} = 10 \times 5 = 50$$

和は 50

- 9 初項から第5項が48である等比数列（公比2）の初項を求めよ。

初項 3

$$a_5 = a \times 2^4 = 16a = 48 \text{ より } a = 3$$

初項は 3

- 10 第2項が6、第4項が24である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし公比は正とする。

初項 3 公比 2

$$a_2 = ar = 6, a_4 = ar^3 = 24。$$

$$a_4 \div a_2 = r^2 = 4, \text{ 公比は正なので } r = 2。$$

$$a = 6 \div 2 = 3$$

初項 3、公比 2

- 11 第3項が -12 、公比 -2 である等比数列の初項を求めよ。

初項 -3

$$a_3 = a \times (-2)^2 = 4a = -12 \text{ より } a = -3$$

初項は -3

12

和からnを求める

初項2、公比3の等比数列で、初項から第 n 項までの和が242になるときの n を求めよ。

$$n = \underline{5}$$

$$S_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1 = 242$$
$$3^n = 243 = 3^5$$

$$n = 5$$

13

和からnを求める

初項1、公比2の等比数列で、初項から第 n 項までの和が127になるときの n を求めよ。

$$n = \underline{7}$$

$$S_n = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1 = 127$$
$$2^n = 128 = 2^7$$

$$n = 7$$

14

公比2の等比数列で、初項から第3項までの和が21であるとき、初項を求めよ。

$$\text{初項 } \underline{3}$$

$$S_3 = \frac{a(2^3 - 1)}{2 - 1} = 7a = 21 \text{ より } a = 3$$

初項は 3

挑戦 (15~18)

15

2項から初項・公比を決定

第2項が -6 、第5項が 162 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし公比は実数とする。

初項 2 公比 -3

$$a_2 = ar = -6, a_5 = ar^4 = 162。$$

$$a_5 \div a_2 = r^3 = 162 \div (-6) = -27 \text{ より } r = -3 \text{ (実数の3乗根はただ1つ)。}$$

$$a = -6 \div (-3) = 2$$

初項 2、公比 -3

16

条件から和を求める

初項1の等比数列で、第3項が9、公比は正の実数であるとき、初項から第4項までの和 S_4 を求めよ。

$S_4 =$ 40

$$a_3 = 1 \times r^2 = 9 \text{ より } r^2 = 9、\text{公比は正なので } r = 3。$$

$$S_4 = \frac{1 \times (3^4 - 1)}{3 - 1} = \frac{80}{2} = 40$$

$$S_4 = 40$$

17

2項から初項・公比を決定

第2項が4、第5項が -32 である等比数列の初項と公比を求めよ。

初項 -2 公比 -2

$$a_2 = ar = 4, a_5 = ar^4 = -32。$$

$$a_5 \div a_2 = r^3 = -32 \div 4 = -8 \text{ より } r = -2。$$

$$a = 4 \div (-2) = -2$$

初項 -2 、公比 -2

18

S3とS6の関係

ある等比数列で、初項から第3項までの和が9、初項から第6項までの和が -63 であるとき、公比 r を求めよ (r は実数とする)。

公比 -2

S_6 は「最初の3項の和」と「後の3項の和」に分けて考えられ、後の3項は最初の3項をちょうど r^3 倍したものになっている。

$$\text{つまり } S_6 = S_3 + r^3 S_3 = S_3(1 + r^3)。$$

$$-63 = 9(1 + r^3) \text{ より } 1 + r^3 = -7, r^3 = -8 \text{ より } r = -2。$$

公比は -2

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

等差かつ等比

3つの数 $2, x, y$ がこの順に等差数列であり、同時にこの順に等比数列でもあるとき、 x, y の値を求めよ。

$$x = \underline{2} \quad y = \underline{2}$$

等差数列の条件（等差中項）： $2x = 2 + y$ ……(1)

等比数列の条件（等比中項）： $x^2 = 2y$ ……(2)

(1)より $y = 2x - 2$ 。これを(2)に代入すると

$$x^2 = 2(2x - 2) = 4x - 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

よって $x = 2$ 。(1)に代入して $y = 2 \times 2 - 2 = 2$ 。

検算： $2, 2, 2$ は公差0の等差数列であり、公比1の等比数列でもある（両方の条件をどちらも満たす）。

一般に、等差数列と等比数列を両方満たす数列は、すべての項が等しい数列に限られる。

$$x = 2, y = 2$$

応2

S3とS6から初項・公比を決定

等比数列 $\{a_n\}$ において、初項から第3項までの和が7、初項から第6項までの和が63であるとき、初項 a と公比 r を求めよ。

初項 1 公比 2

$S_6 = S_3(1 + r^3)$ の関係（練習問題18と同じ考え方）を使う。

$63 = 7(1 + r^3)$ より $1 + r^3 = 9$ 、 $r^3 = 8$ 、よって $r = 2$ 。

初項は $S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = \frac{a \times 7}{1} = 7a = 7$ より $a = 1$ 。

検算：初項1、公比2の数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32。

$S_3 = 1 + 2 + 4 = 7$ 、 $S_6 = 7 + 8 + 16 + 32 = 63$ 。両方一致する。

初項 1、公比 2

応3

複利計算

元金500000円を年利4%の複利で3年間運用したときの残高を求めよ。

残高 562432 円

$a_0 = 500000$ 、年利率 $r = 0.04$ より $1 + r = 1.04$ 。

3年後の残高は $a_3 = a_0(1 + r)^3$ 。

$$1.04^2 = 1.0816$$

$$1.04^3 = 1.0816 \times 1.04 = 1.124864$$

$$a_3 = 500000 \times 1.124864 = 562432$$

3年後の残高は 562432円

初項 a ($a \neq 0$)、公比 r ($r \neq 0$) の等比数列 $\{a_n\}$ において、 a_2, a_4, a_6 もこの順に等比数列をなすことを示し、その公比を r で表せ。

$a_2 = ar$ 、 $a_4 = ar^3$ 、 $a_6 = ar^5$ である。

隣り合う項の比を計算すると

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{ar^3}{ar} = r^2$$

$$\frac{a_6}{a_4} = \frac{ar^5}{ar^3} = r^2$$

どちらの比も同じ値 r^2 になるので、 a_2, a_4, a_6 はこの順に等比数列をなす。

a_2, a_4, a_6 は公比 r^2 の等比数列になる（もとの数列から1項おきに取り出すと、公比が2乗された等比数列ができる）

初項2の等比数列で、初項から第3項までの和が26であるとき、公比 r を求めよ。
ただし r は整数とする。

公比 3,-4

$$S_3 = \frac{2(r^3 - 1)}{r - 1} = 2(r^2 + r + 1) \quad (r \neq 1 \text{ のときの因数分解 } r^3 - 1 = (r - 1)(r^2 + r + 1) \text{ を利用})$$

$$2(r^2 + r + 1) = 26$$

$$r^2 + r + 1 = 13$$

$$r^2 + r - 12 = 0$$

$$(r + 4)(r - 3) = 0$$

よって $r = 3$ または $r = -4$ 。どちらも整数なので、両方とも解になる。

$$\text{検算 } (r = 3) : 2, 6, 18, S_3 = 2 + 6 + 18 = 26$$

$$\text{検算 } (r = -4) : 2, -8, 32, S_3 = 2 - 8 + 32 = 26 \quad \text{どちらも成立。}$$

公比は $r = 3$ または $r = -4$