

数列 まとめ

問題プリント（全27問）

氏名 _____

得点 /27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1 等差数列・一般項

数列 6, 11, 16, 21, ... は等差数列である。公差 d と、一般項を $a_n = pn + q$ の形で表したときの p, q を求めよ。

$d =$ $p =$ $q =$

2 等差数列・特定項（公差が負）

初項8、公差 -3 の等差数列の第9項を求めよ。

$a_9 =$

3 等差数列・和

初項3、公差4の等差数列について、初項から第15項までの和 S_{15} を求めよ。

$S_{15} =$

4 等比数列・特定項

初項4、公比3の等比数列の第5項を求めよ。

$a_5 =$

5 等比数列・和（公比が負）

初項2、公比 -2 の等比数列について、初項から第5項までの和 S_5 を求めよ。

$S_5 =$

6 Σ の基本公式

$\sum_{k=1}^6 k$ の値を求めよ。

値

7 Σ の基本公式 (k^3)

$\sum_{k=1}^5 k^3$ の値を求めよ。

値

8 Σ の計算（2項に分ける）

$\sum_{k=1}^4 (3k - 1)$ の値を求めよ。

値

9 階差数列

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 2$ 、階差数列 $b_n = 3n$ ($b_n = a_{n+1} - a_n$) を満たす。 a_4 を求めよ。

$a_4 =$

10 漸化式（等差型）

$a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 4$ の一般項を $a_n = pn + q$ の形で表すとき、 p, q を求めよ。

$p =$ $q =$

11 漸化式（等比型）

$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$ のとき、 a_5 を求めよ。

$a_5 =$

12 漸化式（ $pan+q$ 型）

$a_1 = 4, a_{n+1} = 2a_n + 3$ について、特性方程式の解 α と a_4 を求めよ。

$\alpha =$ $a_4 =$

13 数学的帰納法・等式

等式 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 6$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺

$n=6$ の右辺

14 数学的帰納法・不等式

不等式 $2^n > n$ ($n \geq 1$) を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のときの左辺・右辺、また $n = 5$ のときの左辺・右辺を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺

$n=5$ の左辺

$n=5$ の右辺

15 数学的帰納法・倍数

すべての自然数 n について $n^3 - n$ は 6 の倍数であることを証明する。 $n = 1$ と $n = 2$ のときの値をそれぞれ求めよ。

$n=1$ の値 $n=2$ の値

発展（16～25）

16 等差中項

3つの数 $x - 2, 3x, 4x + 3$ がこの順に等差数列をなすとき、 x の値を求めよ。

$x =$

17 等差数列・2条件から和の最大

ある等差数列で、第3項が15、第7項が-1であるとき、初項から第 n 項までの和が最大になるときの n と、その最大値を求めよ。

$n =$ 最大値

18 S_n から a_n を求める（ $n \geq 2$ の場合分け・ $n=1$ で不成立）

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $S_n = 3n^2 + n + 5$ で表されるとき、 a_1 を求めよ。また $n \geq 2$ のときの一般項を $a_n = pn + q$ の形で表し、 p, q を求めよ（この式が $n = 1$ でも成り立つかどうかとも確かめること）。

$a_1 =$ $p =$ $q =$

19 漸化式・おきかえ型

$a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ の一般項を $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^{n-1}$ の形で表すとき、 A, B と a_4 を求めよ。

$A =$ $B =$

$a_4 =$

20 漸化式（ $pan+q$ 型）・検算重視

$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2$ の一般項を $a_n = A \cdot 3^{n-1} - B$ の形で表すとき、 A, B と a_5 を求めよ。

$A =$ $B =$

$a_5 =$

21 漸化式・特性方程式の解と初項が一致する特殊ケース

$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - 4$ のとき、 a_{10} を求めよ。

$a_{10} =$

22

数学的帰納法・等式（ Σ との融合）

$$\text{等式 } \sum_{k=1}^n k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \text{ を数}$$

学的帰納法で証明する。 $n=1$ のとき左辺・右辺の値、また $n=4$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 $n=1$ の右辺

$n=4$ の右辺

23

階差数列（等比型）

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1$ 、階差数列 $b_n = 2^n$ ($b_n = a_{n+1} - a_n$) を満たす。一般項 a_n を求め、 a_6 を求めよ。

$a_n = 2^n -$ $a_6 =$

24

漸化式との融合（推測してから帰納法で証明）

$a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - 1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = A \cdot 2^{n-1} + C$ の形に推測したとき、 A, C の値を求めよ。また a_6 の値を求めよ。

$A =$ $C =$

$a_6 =$

25

部分分数分解（telescoping）・章の総合

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$$

を用いて $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ を計算すると $\frac{n}{3n+A}$ の形になる。Aの値と、 $n=8$ のときの値を求めよ。

A = $n=8$ のときの値

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

等差数列の和の公式は「 S_n を逆順に並べて足す」ことで導かれ、等比数列の和の公式は「 S_n と rS_n の差をとる」ことで導かれる。この2つの導出は一見まったく違う操作に見えるが、実は共通する発想がある。その共通点を、それぞれの導出の要点に触れながら説明せよ。

記2

この章では、一般項がすぐにはわからない数列を扱うために「階差数列（ Σ で組み立てる）」「特性方程式（漸化式を等比数列に帰着させる）」「数学的帰納法（推測して証明する）」という3つの道具を学んだ。数列 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3n + 1$ の一般項を求めるには、この3つのうちどれが最も適切か、理由とともに述べよ。また実際にその方法で一般項を求めよ。

EXAM
共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分／配点 20点

太郎さんは、毎月はじめに貯金箱にお金を入れることにした。1か月目は1000円入れ、2か月目以降は毎月200円ずつ増やして入れていく（1か月目1000円、2か月目1200円、3か月目1400円、…）。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

花子「これって、数列の考え方が使えそうだね。」

太郎「うん。 n か月目に入れる金額を a_n 円として、まず式で表してみよう。」

(1) n か月目に入れる金額 a_n を n の式で表すと $a_n = \boxed{\text{アイウ}}n + \boxed{\text{エオカ}}$ である。

アイウ エオカ

(2) 先生「 n か月間の貯金の合計金額を S_n 円としよう。」

(1)の結果を用いて S_n を n の式で表すと $S_n = \boxed{\text{キクケ}}n^2 + \boxed{\text{コサシ}}n$ である。

キクケ コサシ

(3) 花子「貯金の合計金額がはじめて10000円を超えるのは何か月目か知りたいな。」

(2)の結果を用いて、 $n = 6$ と $n = 7$ のときの S_n をそれぞれ計算し比べることで、合計金額がはじめて10000円を超えるのは $n = \boxed{\text{ス}}$ か月目であることがわかる。

ス

大問2 目標時間 8分／配点 20点

先生と生徒が、氷水につけたペットボトルの温度変化について話している。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

生徒「最初（1回目の測定）の温度は 80°C でした。その後1分ごとに測定します。」

先生「ある回の温度と水温 4°C との差が、次の回にはちょうど半分になっているとしよう。 n 回目の測定での温度を a_n （ $^{\circ}\text{C}$ ）とすると、どんな式で表せるかな。」

生徒「 $a_1 = 80$ 、そして $a_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(a_n - 4)$ 、つまり $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$ になります。」

(1)

この漸化式の特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 2$ を解くと、 $\alpha = \boxed{\text{ア}}$ である。これは、時間が十分に経ったときにこの温度が近づいていく値（水温）を表している。

ア

(2)

もとの漸化式と(1)の特性方程式を辺々引くことで、一般項は $a_n = \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オカ}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\boxed{\text{キ}}}$ と表せる。

エ、オカ、キの値を求めよ。

エ

オカ

キ

(3)

(2)の結果を用いて $n = 7$ と $n = 8$ のときの a_n をそれぞれ計算することで、温度がはじめて 5°C 以下になるのは $\boxed{\text{ク}}$ 回目の測定であることがわかる。

ク