

数列 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

等差数列・一般項

数列 $6, 11, 16, 21, \dots$ は等差数列である。公差 d と、一般項を $a_n = pn + q$ の形で表したときの p, q を求めよ。

$$d = \underline{5} \quad p = \underline{5} \quad q = \underline{1}$$

隣り合う項の差より $d = 11 - 6 = 5$ 。

一般項は $a_n = 6 + (n - 1) \times 5 = 5n + 1$ 。

$$d = 5, p = 5, q = 1$$

2

等差数列・特定項（公差が負）

初項8、公差 -3 の等差数列の第9項を求めよ。

$$a_9 = \underline{-16}$$

$$a_n = 8 + (n - 1) \times (-3)$$

$$a_9 = 8 + 8 \times (-3) = 8 - 24 = -16$$

$$a_9 = -16$$

3

等差数列・和

初項3、公差4の等差数列について、初項から第15項までの和 S_{15} を求めよ。

$$S_{15} = \underline{465}$$

$$a_n = 3 + (n - 1) \times 4 = 4n - 1$$

$$a_{15} = 4 \times 15 - 1 = 59$$

$$S_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = \frac{15(3 + 59)}{2} = \frac{15 \times 62}{2} = 465$$

$$S_{15} = 465$$

4

等比数列・特定項

初項4、公比3の等比数列の第5項を求めよ。

$$a_5 = \underline{324}$$

$$\text{一般項は } a_n = 4 \cdot 3^{n-1}.$$

$$a_5 = 4 \times 3^4 = 4 \times 81 = 324$$

$$a_5 = 324$$

5

等比数列・和（公比が負）

初項2、公比 -2 の等比数列について、初項から第5項までの和 S_5 を求めよ。

$$S_5 = \underline{22}$$

$$S_5 = \frac{2\{(-2)^5 - 1\}}{-2 - 1} = \frac{2 \times (-33)}{-3} = \frac{-66}{-3} = 22$$

$$\text{検算：} 2 - 4 + 8 - 16 + 32 = 22$$

$$S_5 = 22$$

6

 Σ の基本公式

$\sum_{k=1}^6 k$ の値を求めよ。

$$\text{値 } \underline{21}$$

$$\sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 21$$

$$21$$

7

 Σ の基本公式 (k^3)

$\sum_{k=1}^5 k^3$ の値を求めよ。

$$\text{値 } \underline{225}$$

$$\sum_{k=1}^5 k^3 = \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6\right)^2 = 15^2 = 225$$

$$225$$

8

 Σ の計算 (2項に分ける)

$\sum_{k=1}^4 (3k - 1)$ の値を求めよ。

値 26

$$\sum_{k=1}^4 (3k - 1) = 3 \sum_{k=1}^4 k - \sum_{k=1}^4 1 = 3 \times 10 - 4 = 26$$

検算 : $2 + 5 + 8 + 11 = 26$ 26

9

階差数列

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 2$ 、階差数列 $b_n = 3n$ ($b_n = a_{n+1} - a_n$) を満たす。 a_4 を求めよ。

 $a_4 =$ 20

$$a_4 = a_1 + \sum_{k=1}^3 b_k = 2 + \sum_{k=1}^3 3k = 2 + 3 \times (1 + 2 + 3) = 2 + 18 = 20$$

検算 (1歩ずつ) : $a_1 = 2$ 、 $a_2 = 2 + 3 = 5$ ($b_1 = 3$)、 $a_3 = 5 + 6 = 11$ ($b_2 = 6$)、 $a_4 = 11 + 9 = 20$ ($b_3 = 9$)。

 $a_4 = 20$

10

漸化式（等差型）

$a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 4$ の一般項を $a_n = pn + q$ の形で表すとき、 p , q を求めよ。

$$p = \underline{4} \quad q = \underline{1}$$

等差型なので $a_n = a_1 + (n-1) \times 4 = 5 + 4n - 4 = 4n + 1$ 。

$$p = 4, q = 1$$

11

漸化式（等比型）

$a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n$ のとき、 a_5 を求めよ。

$$a_5 = \underline{162}$$

等比型なので $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ 。

$$a_5 = 2 \times 3^4 = 2 \times 81 = 162$$

$$a_5 = 162$$

12

漸化式（ $pan+q$ 型）

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$ について、特性方程式の解 α と a_4 を求めよ。

$$\alpha = \underline{-3} \quad a_4 = \underline{53}$$

$\alpha = 2\alpha + 3$ より $-\alpha = 3$, $\alpha = -3$ 。

$$a_n + 3 = (a_1 + 3)2^{n-1} = 7 \cdot 2^{n-1} \text{ より } a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 3。$$

検算（1歩ずつ）： $a_1 = 4$, $a_2 = 2 \times 4 + 3 = 11$, $a_3 = 2 \times 11 + 3 = 25$, $a_4 = 2 \times 25 + 3 = 53$ 。

$$\alpha = -3, a_4 = 53$$

等式 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 6$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 1 $n=1$ の右辺 1 $n=6$ の右辺 36

(i) $n = 1$: 左辺 = 1、右辺 = $1^2 = 1$ 。一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ 。両辺に次の奇数 $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$ を加えると $k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$ となり、これは $n = k + 1$ の場合の右辺と一致する。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で成り立つ ($n=6$ の右辺は $6^2 = 36$)**

不等式 $2^n > n$ ($n \geq 1$) を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のときの左辺・右辺、また $n = 5$ のときの左辺・右辺を求めよ。

$n=1$ の左辺 2 $n=1$ の右辺 1 $n=5$ の左辺 32 $n=5$ の右辺 5

(i) $n = 1$: 左辺 = 2、右辺 = 1。 $2 > 1$ より成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定 : $2^k > k$ 。両辺を2倍すると $2^{k+1} > 2k$ 。 $k \geq 1$ より $2k = k + k \geq k + 1$ なので $2^{k+1} > 2k \geq k + 1$ 、つまり $2^{k+1} > k + 1$ 。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で $2^n > n$ が成り立つ ($n=5$ では $32 > 5$)**

すべての自然数 n について $n^3 - n$ は 6 の倍数であることを証明する。 $n = 1$ と $n = 2$ のときの値をそれぞれ求めよ。

$n=1$ の値 0 $n=2$ の値 6

$n = 1 : 1^3 - 1 = 0$ (0は6の倍数)。 $n = 2 : 2^3 - 2 = 6$ (6は6の倍数)。どちらも成り立っている。

(証明の骨格は、(ii)で $k^3 - k = 6m$ と仮定し、 $(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 - k) + 3k(k+1)$ と変形して、連続する2整数の積 $k(k+1)$ が必ず偶数であることを使い、全体が6の倍数になることを示す。)

$n=1$ の値は0、 $n=2$ の値は6 (どちらも6の倍数)

発展 (16~25)

3つの数 $x - 2$, $3x$, $4x + 3$ がこの順に等差数列をなすとき、 x の値を求めよ。

$x =$ 1

3数が等差数列をなす条件は「まん中の数の2倍＝両端の和」。

$$2 \times 3x = (x - 2) + (4x + 3)$$

$$6x = 5x + 1$$

$$x = 1$$

検算： $x = 1$ のとき3数は -1 , 3 , 7 。公差はどちらも4で等差数列になっている。

$$x = 1$$

ある等差数列で、第3項が15、第7項が -1 であるとき、初項から第 n 項までの和が最大になるときの n と、その最大値を求めよ。

$n = \underline{\quad 6 \quad}$ 最大値 $\underline{\quad 78 \quad}$

$$\text{公差は } d = \frac{a_7 - a_3}{7 - 3} = \frac{-1 - 15}{4} = -4。$$

$$\text{初項は } a_1 = a_3 - 2d = 15 - 2 \times (-4) = 15 + 8 = 23。$$

$$a_n = 23 + (n - 1) \times (-4) = 27 - 4n$$

$a_n \geq 0$ を解くと $27 - 4n \geq 0$ より $n \leq 6.75$ 。 n は自然数なので $n = 6$ ($a_6 = 27 - 24 = 3$ は正、 $a_7 = 27 - 28 = -1$ は負で、与えられた $a_7 = -1$ とも一致する)。

$$S_6 = \frac{6(a_1 + a_6)}{2} = \frac{6(23 + 3)}{2} = 3 \times 26 = 78$$

$n = 6$ のとき最大値78

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $S_n = 3n^2 + n + 5$ で表されるとき、 a_1 を求めよ。また $n \geq 2$ のときの一般項を $a_n = pn + q$ の形で表し、 p, q を求めよ (この式が $n = 1$ でも成り立つかどうか確かめること)。

$$a_1 = \underline{9} \quad p = \underline{6} \quad q = \underline{-2}$$

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 + 1 + 5 = 9$$

$n \geq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$ を計算する。

$$S_{n-1} = 3(n-1)^2 + (n-1) + 5 = 3n^2 - 6n + 3 + n - 1 + 5 = 3n^2 - 5n + 7$$

$$a_n = (3n^2 + n + 5) - (3n^2 - 5n + 7) = 6n - 2 \quad (n \geq 2)$$

この式に $n = 1$ を代入すると $6 \times 1 - 2 = 4$ となるが、実際の $a_1 = 9$ とは一致しない。つまりこの $a_n = 6n - 2$ は $n \geq 2$ でしか使えず、 a_1 は別に求めた値をそのまま使う必要がある。

$a_1 = 9$ 、 $n \geq 2$ のとき $a_n = 6n - 2$ ($p = 6, q = -2$ 、この式は $n=1$ では成り立たない)

$a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ の一般項を $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^{n-1}$ の形で表すとき、 A, B と a_4 を求めよ。

$$A = \underline{1} \quad B = \underline{-1} \quad a_4 = \underline{73}$$

両辺を 3^{n+1} で割り $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}$ 。特性方程式 $\beta = \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}$ より $\beta = 1$ 。

$$b_1 = \frac{2}{3} \text{ より } b_n - 1 = \left(\frac{2}{3} - 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}。$$

$$b_n = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \quad a_n = 3^n b_n = 3^n - 3^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 3^n - 2^{n-1}。$$

検算 (1 歩ずつ) : $a_1 = 3 - 1 = 2$ (条件と一致)、 $a_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$ (公式も $9 - 2 = 7$)、 $a_3 = 2 \times 7 + 9 = 23$ (公式も $27 - 4 = 23$)、 $a_4 = 2 \times 23 + 27 = 73$ (公式も $81 - 8 = 73$)。

$$A = 1, B = -1, a_4 = 73 \quad (a_n = 3^n - 2^{n-1})$$

$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2$ の一般項を $a_n = A \cdot 3^{n-1} - B$ の形で表すとき、 A, B と a_5 を求めよ。

$$A = \underline{2} \quad B = \underline{1} \quad a_5 = \underline{161}$$

特性方程式 $\alpha = 3\alpha + 2$ より $-2\alpha = 2, \alpha = -1$ 。

$$a_n + 1 = (a_1 + 1)3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ より } a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1。$$

検算 (1 歩ずつ) : $a_1 = 1, a_2 = 3 \times 1 + 2 = 5$ (公式も $2 \times 3 - 1 = 5$)、 $a_3 = 3 \times 5 + 2 = 17$ (公式も $2 \times 9 - 1 = 17$)、 $a_4 = 3 \times 17 + 2 = 53$ 、 $a_5 = 3 \times 53 + 2 = 161$ 。

$$A = 2, B = 1, a_5 = 161$$

$a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n - 4$ のとき、 a_{10} を求めよ。

$$a_{10} = \underline{2}$$

特性方程式 $\alpha = 3\alpha - 4$ より $-2\alpha = -4$, $\alpha = 2$ 。ところが初項がすでに $a_1 = 2 = \alpha$ 。

$a_n - 2 = (a_1 - 2)3^{n-1} = 0 \times 3^{n-1} = 0$ なので、 $a_n = 2$ がすべての n で成り立つ (定数列)。

実際に $a_2 = 3 \times 2 - 4 = 2$, $a_3 = 3 \times 2 - 4 = 2, \dots$ と、ずっと2のまま変わらない。

$$a_{10} = 2$$

等式 $\sum_{k=1}^n k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ を数学的帰納法で証明する。 $n=1$ のとき左辺・右辺の値、また $n=4$ のときの右辺の値を求めよ。

$$n=1 \text{ の左辺 } \underline{3} \quad n=1 \text{ の右辺 } \underline{3} \quad n=4 \text{ の右辺 } \underline{50}$$

(i) $n=1$: 左辺 $= 1 \times 3 = 3$ 、右辺 $= \frac{1 \times 2 \times 9}{6} = 3$ 。一致するので成り立つ。

(ii) $n=k$ で成り立つと仮定: $\sum_{k=1}^k$ (略記) $= \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$ 。両辺に次の項 $(k+1)(k+3)$ を加えて通分し $(k+1)$ でくくると、 $n=k+1$ の場合の右辺 $\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$ と一致することが示せる。

(i)(ii) より すべての自然数 n で成り立つ ($n=4$ の右辺は $\frac{4 \times 5 \times 15}{6} = 50$ 、検算: $1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + 4 \times 6 = 3 + 8 + 15 + 24 = 50$)

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1$ 、階差数列 $b_n = 2^n$ ($b_n = a_{n+1} - a_n$) を満たす。一般項 a_n を求め、 a_6 を求めよ。

$$a_n = 2^n - \underline{1} \quad a_6 = \underline{63}$$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + (2^n - 2) = 2^n - 1$$

(Σ の中は初項2・公比2・項数 $n-1$ の等比数列の和で $\frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n - 2$)

$n = 1$ を代入して確認： $2^1 - 1 = 1$ となり $a_1 = 1$ と一致する。よってこの式はすべての n で成り立つ。

検算（1歩ずつ）： $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 2 = 3$, $a_3 = 3 + 4 = 7$, $a_4 = 7 + 8 = 15$, $a_5 = 15 + 16 = 31$, $a_6 = 31 + 32 = 63$ 。公式でも $2^6 - 1 = 63$ 。

$a_n = 2^n - 1$ (すべての n で成立)、 $a_6 = 63$

$a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - 1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = A \cdot 2^{n-1} + C$ の形に推測したとき、 A, C の値を求めよ。また a_6 の値を求めよ。

$$A = \underline{2} \quad C = \underline{1} \quad a_6 = \underline{65}$$

項を計算する。 $a_1 = 3, a_2 = 2 \times 3 - 1 = 5, a_3 = 2 \times 5 - 1 = 9, a_4 = 2 \times 9 - 1 = 17, a_5 = 2 \times 17 - 1 = 33, a_6 = 2 \times 33 - 1 = 65$ 。

それぞれから1を引くと2, 4, 8, 16, 32, 64となり、初項2、公比2の等比数列に見える。よって $a_n - 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$ 、すなわち

推測： $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} + 1$ ($A=2, C=1$)

数学的帰納法で証明する。(i) $n = 1 : 2 \cdot 2^0 + 1 = 2 + 1 = 3$ 。 $a_1 = 3$ と一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定： $a_k = 2 \cdot 2^{k-1} + 1$ 。漸化式に代入すると

$$a_{k+1} = 2a_k - 1 = 2(2 \cdot 2^{k-1} + 1) - 1 = 2 \cdot 2^k + 2 - 1 = 2 \cdot 2^k + 1 = 2 \cdot 2^{(k+1)-1} + 1$$

これは推測した式で n を $k + 1$ に置き換えた式そのものである。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} + 1$ が成り立つ ($a_6=65$)**

$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$ を用いて
 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ を計算すると $\frac{n}{3n+\text{ア}}$ の形になる。アの値と、 $n=8$
 のときの値を求めよ。

ア = 1 $n=8$ のときの値 8/25

与えられた分解式を使ってΣを書き並べる。

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

真ん中が打ち消し合い、最初の $\frac{1}{1}$ と最後の $-\frac{1}{3n+1}$ だけが残る。

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{n}{3n+1}$$

$$n=8 \text{ を代入: } \frac{8}{3 \times 8 + 1} = \frac{8}{25} = 0.32$$

検算 ($n=2$): 与式は $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{7+1}{28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$ 。公式に
 $n=2$ を代入すると $\frac{2}{7}$ で一致。

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}, \quad n=8 \text{ のとき } \frac{8}{25} = 0.32$$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 等差数列の和の公式は「 S_n を逆順に並べて足す」ことで導かれ、等比数列の和の公式は「 S_n と rS_n の差をとる」ことで導かれる。この2つの導出は一見まったく違う操作に見えるが、実は共通する発想がある。その共通点を、それぞれの導出の要点に触れながら説明せよ。

等差数列の和の公式の導出では、 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ という式と、それを逆順に並べた $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1$ という式の2つを用意し、この2つをたてに足し合わせる。等差数列では隣り合う項が一定の差 d で変化するため、上下でペアになる項の和はどの組も $a_1 + a_n$ で必ずそう。この「そろった値」が n 組できるので、 $2S_n = n(a_1 + a_n)$ という単純な形にまとまり、和の公式が得られる。

等比数列の和の公式の導出では、 $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ という式と、その両辺に公比 r をかけた $rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n$ という式の2つを用意し、今度は引き算する。等比数列では隣り合う項が一定の比 r で変化するため、 rS_n の各項はもとの S_n の項をちょうど1つずつずらしたものになっており、引き算すると中間の項がすべて打ち消し合って、最初と最後の項だけが残る。

一見すると、一方は「並べ方を変えて足す」、もう一方は「かけてから引く」というまったく別の操作に見える。しかし共通しているのは、どちらも**同じ数列を2通りの形で書き表し、その2つを組み合わせることで、求めたい S_n 自身を1個ずつ足す面倒な計算をせずに済ませている**という発想である。等差数列では「対にすると和が一定になる」という性質を使い、等比数列では「ずらすと項が重なって消える」という性質を使っており、どちらも数列の規則性（一定の差、一定の比）を逆手にとって、公式という1つの式に圧縮している点で本質的に同じ発想だといえる。

どちらも「**同じ数列を2通りに書いて組み合わせる**」ことで、1項ずつ足す代わりに求めたい和を一気に求める発想を共有している。等差数列は「**対にすると和が一定になる**」性質を、等比数列は「**ずらすと項が重なって消える**」性質を、それぞれ利用している。

記2

この章では、一般項がすぐにはわからない数列を扱うために「階差数列（ Σ で組み立てる）」「特性方程式（漸化式を等比数列に帰着させる）」「数学的帰納法（推測して証明する）」という3つの道具を学んだ。数列 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3n + 1$ の一般項を求めるには、この3つのうちどれが最も適切か、理由とともに述べよ。また実際にその方法で一般項を求めよ。

この漸化式 $a_{n+1} = a_n + 3n + 1$ は、右辺が「 a_n そのもの + n の式」という形になっている。特性方程式が使えるのは $a_{n+1} = pa_n + q$ のように a_n に何倍かがかかっている場合であり、この式は a_n の係数が1なので、その帰着テクニックの出番ではない。また、数学的帰納法は「推測した式が正しいこと」を証明する道具であって、そもそもの一般項を導き出す道具ではないため、先に何らかの方法で式を推測する必要がある。

これに対して、隣り合う項の差 $a_{n+1} - a_n = 3n + 1$ がちょうど n の式になっているので、これは階差数列そのものである。階差数列がわかっているならば、 Σ を使って直接一般項を組み立てられるため、推測や場合分けの手間なく最短で答えにたどりつける。よって、この3つの中では**階差数列（ Σ で組み立てる方法）**が最も適切である。

実際に求める。 $b_n = 3n + 1$ とすると、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k + 1) = 1 + 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + (n-1)$$

$(n-1)$ でくくって整理すると

$$= 1 + (n-1) \left(\frac{3n}{2} + 1 \right) = 1 + \frac{(n-1)(3n+2)}{2}$$

分子をそろえて計算する。

$$\begin{aligned} (n-1)(3n+2) &= 3n^2 + 2n - 3n - 2 = 3n^2 - n - 2 \\ a_n &= \frac{2 + 3n^2 - n - 2}{2} = \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2} \end{aligned}$$

$n = 1$ を代入して確認すると $\frac{1 \times 2}{2} = 1$ となり、 $a_1 = 1$ と一致するので、この式はすべての n で成り立つ。

検算（1歩ずつ）： $a_2 = a_1 + (3 \times 1 + 1) = 1 + 4 = 5$ （公式も $\frac{2 \times 5}{2} = 5$ ）、

$a_3 = a_2 + (3 \times 2 + 1) = 5 + 7 = 12$ （公式も $\frac{3 \times 8}{2} = 12$ ）。一致する。

階差数列（ Σ で組み立てる方法）が最も適切。 $a_n = \frac{n(3n - 1)}{2}$
（すべてのnで成立）

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分／配点 20点

太郎さんは、毎月はじめに貯金箱にお金を入れることにした。1か月目は1000円入れ、2か月目以降は毎月200円ずつ増やして入れていく（1か月目1000円、2か月目1200円、3か月目1400円、…）。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

花子「これって、数列の考え方が使えそうだね。」

太郎「うん。 n か月目に入れる金額を a_n 円として、まず式で表してみよう。」

(1) n か月目に入れる金額 a_n を n の式で表すと $a_n = \boxed{\text{アイウ}}n + \boxed{\text{エオカ}}$ である。

アイウ 200 エオカ 800

初項1000、公差200の等差数列なので

$$a_n = 1000 + 200(n - 1) = 200n + 1000 - 200 = 200n + 800$$

検算： $n = 1$ のとき $200 + 800 = 1000$ （条件と一致）、 $n = 2$ のとき $400 + 800 = 1200$ （条件と一致）。

$$a_n = 200n + 800$$

(2) 先生「 n か月間の貯金の合計金額を S_n 円としよう。」

(1)の結果を用いて S_n を n の式で表すと $S_n = \boxed{\text{キクケ}}n^2 + \boxed{\text{コサシ}}n$ である。

キクケ 100 コサシ 900

等差数列の和の公式を使う。

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n\{1000 + (200n + 800)\}}{2} = \frac{n(1800 + 200n)}{2} = 900n + 100n^2$$

$$S_n = 100n^2 + 900n$$

(3)

花子「貯金の合計金額がはじめて10000円を超えるのは何か月目か知りたいな。」

(2)の結果を用いて、 $n = 6$ と $n = 7$ のときの S_n をそれぞれ計算し比べることで、合計金額がはじめて10000円を超えるのは $n = \boxed{\text{ス}}$ か月目であることがわかる。

ス 7

(2)の $S_n = 100n^2 + 900n$ に代入して比べる。

$$n = 6 : S_6 = 100 \times 36 + 900 \times 6 = 3600 + 5400 = 9000 \text{ (10000円以下)}$$

$$n = 7 : S_7 = 100 \times 49 + 900 \times 7 = 4900 + 6300 = 11200 \text{ (10000円を超える)}$$

$n = 6$ ではまだ10000円を超えておらず、 $n = 7$ ではじめて超えるので、答えは $n = 7$ 。

$n = 7$ か月目

大問2 目標時間 8分／配点 20点

先生と生徒が、氷水につけたペットボトルの温度変化について話している。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

生徒「最初（1回目の測定）の温度は 80°C でした。その後1分ごとに測定します。」

先生「ある回の温度と水温 4°C との差が、次の回にはちょうど半分になっているでしょう。 n 回目の測定での温度を a_n ($^{\circ}\text{C}$) とすると、どんな式で表せるかな。」

生徒「 $a_1 = 80$ 、そして $a_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(a_n - 4)$ 、つまり $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$ になります。」

(1)

この漸化式の特徴方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 2$ を解くと、 $\alpha = \boxed{\text{ア}}$ である。これは、時間が十分に経ったときにこの温度が近づいていく値（水温）を表している。

ア 4

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 2$$

$$\frac{1}{2}\alpha = 2$$

$$\alpha = 4$$

これは水温4℃に対応しており、時間が経つほど温度がこの値に近づいていくことを表している。

$$\alpha = 4$$

(2)

もとの漸化式と(1)の特徴方程式を辺々引くことで、一般項は $a_n = \boxed{\text{エ}} +$

$\boxed{\text{オカ}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\boxed{\text{キ}}}$ と表せる。エ、オカ、キの値を求めよ。

エ 4 オカ 76 キ 1

もとの漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$ と特徴方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 2$ ($\alpha = 4$) を辺々引くと

$$a_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(a_n - 4)$$

数列 $\{a_n - 4\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で、初項は $a_1 - 4 = 80 - 4 = 76$ 。よって

$$a_n - 4 = 76 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = 4 + 76 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

検算： $n = 1$ のとき $4 + 76 \times 1 = 80$ （条件と一致）、 $n = 2$ のとき $4 + 76 \times \frac{1}{2} = 4 + 38 = 42$ 。実際に $a_2 = \frac{1}{2} \times 80 + 2 = 40 + 2 = 42$ （一致）。

$$a_n = 4 + 76 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(3)

(2)の結果を用いて $n = 7$ と $n = 8$ のときの a_n をそれぞれ計算することで、
温度がはじめて 5°C 以下になるのは ク 回目の測定であることがわかる。

ク 8

(2)の $a_n = 4 + 76 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ に代入して比べる。

$n = 7 : \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ 、 $a_7 = 4 + \frac{76}{64} = 4 + 1.1875 = 5.1875$ (まだ 5°C を超えている)

$n = 8 : \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$ 、 $a_8 = 4 + \frac{76}{128} = 4 + 0.59375 = 4.59375$ (はじめて 5°C 以下になる)

8回目の測定