

推定・仮説検定

解答（全19問）

氏名 _____

得点 _____ / 19点

DRILL

練習問題（全14問）

基本（1～6）

1

母平均の95%信頼区間

母標準偏差15の母集団から、大きさ225の標本を抽出したところ、標本平均が82であった。母平均の95%信頼区間を求めよ。

下限 80.04 上限 83.96

$$\text{標準誤差} \frac{15}{\sqrt{225}} = \frac{15}{15} = 1$$

$$\text{誤差の範囲} 1.96 \times 1 = 1.96$$

$$80.04 \leq \mu \leq 83.96$$

2

母平均の95%信頼区間

母標準偏差12の母集団から、大きさ144の標本を抽出したところ、標本平均が55であった。母平均の95%信頼区間を求めよ。

下限 53.04 上限 56.96

$$\text{標準誤差 } \frac{12}{\sqrt{144}} = \frac{12}{12} = 1$$

$$\text{誤差の範囲 } 1.96 \times 1 = 1.96$$

$$53.04 \leq \mu \leq 56.96$$

3

信頼度90%（表を使う）

母標準偏差25の母集団から、大きさ625の標本を抽出したところ、標本平均が120であった。母平均の90%信頼区間を求めよ。

下限 118.36 上限 121.64

$$\text{標準誤差 } \frac{25}{\sqrt{625}} = \frac{25}{25} = 1$$

$$90\% \text{信頼度の } z \text{ の値は表より } 1.64。 \text{誤差の範囲 } 1.64 \times 1 = 1.64$$

$$118.36 \leq \mu \leq 121.64$$

4

母比率の95%信頼区間

400人にアンケートを行ったところ、200人がある商品に満足と回答した。満足率（母比率）の95%信頼区間を求めよ。

下限 0.451 上限 0.549

$$\text{標本比率 } \hat{p} = \frac{200}{400} = 0.5$$

$$\text{標準誤差 } \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}} = \sqrt{0.000625} = 0.025$$

$$\text{誤差の範囲 } 1.96 \times 0.025 = 0.049$$

$$0.451 \leq p \leq 0.549$$

5

必要な標本の大きさ

母標準偏差が10と分かっている母集団について、信頼度95%の信頼区間の誤差（ $1.96\sigma/\sqrt{n}$ ）を2以下にしたい。必要な標本の大きさの最小値を求めよ（小数点以下切り上げ）。

最小のn 97

$$\text{誤差の条件は } 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 2$$

$$\text{両辺を整理すると } \sqrt{n} \geq \frac{1.96 \times 10}{2} = 9.8$$

$$\text{両辺を2乗して } n \geq 9.8^2 = 96.04$$

n は整数なので切り上げて

$$n = 97$$

母標準偏差8の母集団について、帰無仮説 $H_0 : \mu = 50$ を有意水準5%で両側検定する。大きさ64の標本の標本平均が52.5であったとき、検定統計量 z と結論を求めよ。

$z =$ 2.5 結論 棄却できる

$$z = \frac{52.5 - 50}{8/\sqrt{64}} = \frac{2.5}{1} = 2.5$$

$|z| = 2.5 > 1.96$ なので棄却域に入る。

$z = 2.5$ 、帰無仮説を棄却できる

標準（7～11）

母標準偏差20の母集団から、大きさ400の標本を抽出したところ、標本平均が200であった。母平均の99%信頼区間を求めよ。

下限 197.42 上限 202.58

$$\text{標準誤差} \frac{20}{\sqrt{400}} = \frac{20}{20} = 1$$

99%信頼度の z の値は表より 2.58。誤差の範囲 $2.58 \times 1 = 2.58$

$$197.42 \leq \mu \leq 202.58$$

8

母比率の95%信頼区間（実数から比率を求める）

600人にアンケートを行ったところ、240人がある政策に反対と回答した。反対率（母比率）の95%信頼区間を求めよ。

下限 0.3608 上限 0.4392

$$\text{標本比率 } \hat{p} = \frac{240}{600} = 0.4$$

$$\text{標準誤差 } \sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{600}} = \sqrt{0.0004} = 0.02$$

$$\text{誤差の範囲 } 1.96 \times 0.02 = 0.0392$$

$$0.3608 \leq p \leq 0.4392$$

9

仮説検定の結論（棄却できないケース）

母標準偏差12の母集団について、帰無仮説 $H_0 : \mu = 80$ を有意水準5%で両側検定する。大きさ144の標本の標本平均が81.5であったとき、検定統計量 z と結論を求めよ。

$z =$ 1.5 結論 棄却できない

$$z = \frac{81.5 - 80}{12/\sqrt{144}} = \frac{1.5}{1} = 1.5$$

$|z| = 1.5 < 1.96$ なので棄却域に入らない。

$z = 1.5$ 、帰無仮説を棄却できない

10

必要な標本の大きさ

母標準偏差が18と分かっている母集団について、信頼度95%の信頼区間の誤差を3以下にしたい。必要な標本の大きさの最小値を求めよ（小数点以下切り上げ）。

最小のn 139

$$1.96 \times \frac{18}{\sqrt{n}} \leq 3$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{1.96 \times 18}{3} = \frac{35.28}{3} = 11.76$$

$$n \geq 11.76^2 = 138.2976$$

切り上げて

$$n = 139$$

11

信頼区間から標本平均を逆算

母標準偏差20の母集団から、大きさ100の標本をとって母平均の95%信頼区間を求めたところ $[46.08, 53.92]$ であった。このときの標本平均 $\bar{x}$ の値を求めよ。

$\bar{x} =$ 50

信頼区間 $\bar{x} - 1.96\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.96\sigma/\sqrt{n}$ は、標本平均 $\bar{x}$ を中心にして左右対称。

つまり信頼区間の下限と上限のちょうど真ん中が $\bar{x}$ 。

$$\bar{x} = \frac{46.08 + 53.92}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

(検算：標準誤差 $= 20/\sqrt{100} = 2$ 、誤差 $= 1.96 \times 2 = 3.92$ 、 $50 \pm 3.92 = [46.08, 53.92]$ で一致)

$$\bar{x} = 50$$

挑戦 (12~14)

12

母比率の信頼区間の幅から標本サイズを決める

ある世論調査で、母比率の95%信頼区間の幅を0.04以下にしたい。標本比率はおよそ0.5と見込まれるとき、必要な標本の大きさの最小値を求めよ。

最小のn 2401

幅0.04以下 → 誤差（半分の幅）は0.02以下にすればよい。

$$1.96\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}} \leq 0.02$$

$$\text{両辺を2乗して整理すると } n \geq \frac{1.96^2 \times 0.5 \times 0.5}{0.02^2} = \frac{3.8416 \times 0.25}{0.0004} = \frac{0.9604}{0.0004} = 2401$$

$$n = 2401$$

13

有意水準を変えて結論を比較

母標準偏差40の母集団について、帰無仮説 $H_0: \mu = 500$ を両側検定する。大きさ100の標本の標本平均が511であったとき、検定統計量 z 、および有意水準5%・1%それぞれでの結論を求めよ。

$z =$ 2.75 5%での結論 棄却できる 1%での結論 棄却できる

$$z = \frac{511 - 500}{40/\sqrt{100}} = \frac{11}{4} = 2.75$$

有意水準5%の棄却域は $|z| > 1.96$: $2.75 > 1.96$ なので棄却できる。

有意水準1%の棄却域は $|z| > 2.58$: $2.75 > 2.58$ なので、こちらでも棄却できる。

$z = 2.75$ 、有意水準5%・1%のどちらでも帰無仮説を棄却できる

ある市の世論調査で、賛成派の母比率を信頼区間の幅0.06以下で推定したい。事前調査により賛成率はおよそ30%と見込まれている。必要な標本の大きさの最小値を求めよ（小数点以下切り上げ）。

最小のn 897

幅0.06以下 → 誤差は0.03以下にすればよい。

$$1.96\sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{n}} \leq 0.03$$

$$\text{両辺を2乗して整理すると } n \geq \frac{1.96^2 \times 0.3 \times 0.7}{0.03^2} = \frac{3.8416 \times 0.21}{0.0009} = \frac{0.806736}{0.0009} = 896.373\dots$$

n は整数なので切り上げて

$$n = 897$$

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。信頼区間の幅の性質と、片側検定の入り口に挑戦しよう。

応1

信頼区間の幅と標本の大きさの関係（理論）

母標準偏差 σ 、標本の大きさ n の条件で母平均の95%信頼区間を求めたところ、幅が L であった。同じ σ ・同じ信頼度のまま、信頼区間の幅を $\frac{L}{2}$ （半分）にするには、標本の大きさを何倍にすればよいか。

何倍 4

信頼区間の幅は誤差の2倍、すなわち $L = 2 \times 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ なので、幅 L は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ に比例する。

標本の大きさを k 倍 ($n \rightarrow kn$) にすると、幅は $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 倍になる。

幅を半分にしたいので $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2}$ 、よって $\sqrt{k} = 2$ 、 $k = 4$ 。

標本の大きさを4倍にすればよい

応2

信頼区間の幅と標本の大きさの関係（数値）

ある母集団から大きさ25の標本をとって母平均の95%信頼区間を求めたところ、幅が20であった。同じ母標準偏差・同じ信頼度のまま標本の大きさを100に増やすと、信頼区間の幅はいくらになるか。

幅 10

信頼区間の幅は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ に比例する。

$n = 25$ のとき $\sqrt{n} = 5$ 、 $n = 100$ のとき $\sqrt{n} = 10$ 。 $\sqrt{n}$ が2倍になったので、幅は $\frac{1}{2}$ 倍になる。

$$20 \times \frac{1}{2} = 10$$

信頼区間の幅は10になる

応3

片側検定の入り口（左側）

ある製品の平均重量は従来500gとされていたが、最近軽くなったのではないかと指摘されている。母標準偏差8gの製品から大きさ64の標本を抽出したところ、標本平均は497.4gであった。有意水準5%で「母平均は500gより小さい」と言えるか、片側検定（左側）で判断せよ。

$z =$ -2.6 結論 棄却できる

「小さいと言えるか」という片側だけの主張なので**片側検定**を使う。両側検定では棄却域を左右に半分ずつ ($|z| > 1.96$) 割り振るが、片側検定では棄却域を片方だけに集めるので、有意水準5%に対応する境界値は表の「90%の行」と同じ1.64になる（左片側なら $z < -1.64$ ）。

帰無仮説 $H_0 : \mu = 500$ 、対立仮説 $H_1 : \mu < 500$

$$z = \frac{497.4 - 500}{8/\sqrt{64}} = \frac{-2.6}{1} = -2.6$$

棄却域は $z < -1.64$: $-2.6 < -1.64$ なので棄却域に入る。

$z = -2.6$ 、有意水準5%で帰無仮説を棄却できる（軽くなったと言える）

応4

片側検定の入り口（右側）

新しい肥料を使うと収穫量が増えると期待されている。従来の平均収穫量は300kg（母標準偏差15kg）であった。新しい肥料を使った大きさ225の標本の標本平均が303kgであったとき、有意水準5%で「収穫量が増えた」と言えるか、片側検定（右側）で判断せよ。

$z = 3$ 結論 棄却できる

帰無仮説 $H_0 : \mu = 300$ 、対立仮説 $H_1 : \mu > 300$ （右側検定）

$$z = \frac{303 - 300}{15/\sqrt{225}} = \frac{3}{1} = 3$$

片側検定・有意水準5%の棄却域は $z > 1.64$: $3 > 1.64$ なので棄却域に入る。

$z = 3$ 、有意水準5%で帰無仮説を棄却できる（収穫量は増えたと言える）

応5

信頼区間と両側検定のつながり

母標準偏差10の母集団から大きさ100の標本をとり、母平均の95%信頼区間を求めたところ $[48.04, 51.96]$ であった。この結果をもとに、有意水準5%で帰無仮説 $H_0 : \mu = 52$ を両側検定で棄却できるかどうかを判断せよ（考え方： μ_0 が信頼区間に含まれなければ棄却できる）。

結論 棄却できる

95%信頼区間と有意水準5%の両側検定は表裏一体の関係にある。「信頼区間に μ_0 が含まれる」とこと「有意水準5%で $H_0 : \mu = \mu_0$ を棄却できない」ことは同じ意味になる。

今回、信頼区間は $[48.04, 51.96]$ で、検定したい値 $\mu_0 = 52$ はこの範囲の外（ $51.96 < 52$ ）。

$\mu_0 = 52$ は信頼区間の外なので、有意水準5%で帰無仮説を棄却できる