

二項分布・正規分布

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

二項分布の期待値

当たる確率が $\frac{1}{3}$ のくじを独立に9回引くとき、当たった回数を X とする。期待値 $E(X)$ を求めよ。

$E(X) =$ 3

$$X \sim B\left(9, \frac{1}{3}\right)$$

$$E(X) = np = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

$$E(X) = 3$$

2

二項分布の分散

問1と同じ $X \left(B\left(9, \frac{1}{3}\right) \right)$ について、分散 $V(X)$ を求めよ。

$$V(X) = \underline{2}$$

$$V(X) = np(1-p) = 9 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 9 \times \frac{2}{9} = 2$$

$$V(X) = 2$$

3

二項分布の期待値・分散

ある製品の不良品が出る確率は 0.2 である。この製品を独立に50個検査するとき、不良品の個数を X とする。期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{10} \quad V(X) = \underline{8}$$

$$X \sim B(50, 0.2)$$

$$E(X) = 50 \times 0.2 = 10$$

$$V(X) = 50 \times 0.2 \times 0.8 = 8$$

$$E(X) = 10, V(X) = 8$$

4

標準化の基本

$X \sim N(70, 6^2)$ のとき、 $X = 79$ を標準化した値 Z を求めよ。

$$Z = \underline{3/2}$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{79 - 70}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$Z = \frac{3}{2} (= 1.5)$$

$X \sim N(70, 6^2)$ のとき、 $P(70 \leq X \leq 73)$ を求めよ。

$$P(70 \leq X \leq 73) = \underline{\mathbf{0.1915}}$$

$$Z = \frac{73 - 70}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

表より $p(0.5) = 0.1915$ 。平均70から片側だけの範囲なので、そのまま表の値が答え。

$$P(70 \leq X \leq 73) = 0.1915$$

$X \sim N(100, 15^2)$ のとき、 $P(X \geq 130)$ を求めよ。

$$P(X \geq 130) = \underline{\mathbf{0.0228}}$$

$$Z = \frac{130 - 100}{15} = 2.0$$

表より $p(2.0) = 0.4772$ 。平均より先の端までの範囲なので

$$P(X \geq 130) = 0.5 - p(2.0) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

$$P(X \geq 130) = 0.0228$$

- 7 $X \sim B(25, 0.2)$ のとき、 $E(X)$ 、 $V(X)$ 、 $\sigma(X)$ をそれぞれ求めよ。

$$E(X) = \underline{5} \quad V(X) = \underline{4} \quad \sigma(X) = \underline{2}$$

$$E(X) = 25 \times 0.2 = 5$$

$$V(X) = 25 \times 0.2 \times 0.8 = 4$$

$$\sigma(X) = \sqrt{4} = 2$$

$$E(X) = 5, V(X) = 4, \sigma(X) = 2$$

- 8 成功確率 $p = 0.3$ の試行を独立に n 回繰り返す。成功回数を X とするとき、 $E(X) = 12$ であった。 n の値と、そのときの分散 $V(X)$ を求めよ。

$$n = \underline{40} \quad V(X) = \underline{42/5}$$

$$E(X) = np \text{ より } 12 = n \times 0.3, \text{ よって } n = \frac{12}{0.3} = 40$$

$$V(X) = np(1-p) = 40 \times 0.3 \times 0.7 = 8.4$$

$$n = 40, V(X) = 8.4 \left(= \frac{42}{5} \right)$$

- 9 $X \sim N(50, 4^2)$ のとき、 $P(42 \leq X \leq 54)$ を求めよ。

$$P(42 \leq X \leq 54) = \underline{0.8185}$$

$$\text{左端 } Z_1 = \frac{42 - 50}{4} = -2.0, \text{ 右端 } Z_2 = \frac{54 - 50}{4} = 1.0$$

平均50を挟んで左右に広がる範囲なので、左右それぞれの表の値をたす。

$$P(42 \leq X \leq 54) = p(2.0) + p(1.0) = 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$$

$$P(42 \leq X \leq 54) = 0.8185$$

- 10 $X \sim N(80, 10^2)$ のとき、 $P(70 \leq X \leq 105)$ を求めよ。

$$P(70 \leq X \leq 105) = \underline{0.8351}$$

$$\text{左端 } Z_1 = \frac{70 - 80}{10} = -1.0, \text{ 右端 } Z_2 = \frac{105 - 80}{10} = 2.5$$

平均80を挟んで左右に広がる範囲なので、左右それぞれの表の値をたす。

$$P(70 \leq X \leq 105) = p(1.0) + p(2.5) = 0.3413 + 0.4938 = 0.8351$$

$$P(70 \leq X \leq 105) = 0.8351$$

- 11 $X \sim N(30, 5^2)$ のとき、 $P(35 \leq X \leq 42.5)$ を求めよ。

$$P(35 \leq X \leq 42.5) = \underline{0.1525}$$

$$Z_1 = \frac{35 - 30}{5} = 1.0, Z_2 = \frac{42.5 - 30}{5} = 2.5$$

両端とも平均30より右側（同じ側）なので、外側から内側を引く。

$$P(35 \leq X \leq 42.5) = p(2.5) - p(1.0) = 0.4938 - 0.3413 = 0.1525$$

$$P(35 \leq X \leq 42.5) = 0.1525$$

- 12 1枚の硬貨を独立に64回投げるとき、表の出る回数を X とする。 X を正規分布で近似するときの平均 μ と標準偏差 σ を求めよ。

$$\mu = \underline{32} \quad \sigma = \underline{4}$$

$X \sim B(64, 0.5)$ なので

$$\mu = E(X) = 64 \times 0.5 = 32$$

$$V(X) = 64 \times 0.5 \times 0.5 = 16, \sigma = \sqrt{16} = 4$$

$$\mu = 32, \sigma = 4$$

挑戦 (13~16)

13 問12の続き

問12の X (硬貨を64回投げたときの表の回数) について、正規近似を使って $P(24 \leq X \leq 44)$ を求めよ。

$$P(24 \leq X \leq 44) = \underline{0.9759}$$

問12より $\mu = 32, \sigma = 4$ 。

$$Z_1 = \frac{24 - 32}{4} = -2.0, Z_2 = \frac{44 - 32}{4} = 3.0$$

平均32を挟んで左右に広がる範囲なので、左右それぞれの表の値をたす。

$$P(24 \leq X \leq 44) \approx p(2.0) + p(3.0) = 0.4772 + 0.4987 = 0.9759$$

$$P(24 \leq X \leq 44) \approx 0.9759$$

ある試験の得点 X は正規分布 $N(65, 10^2)$ に従うとする。得点90点以上の受験者は、全体の上位何%にあたるか。小数第2位まで、%の数値のみ入力せよ。

上位 0.62 %

$$Z = \frac{90 - 65}{10} = 2.5$$

表より $p(2.5) = 0.4938$ 。「90点以上」は平均より先の端までの範囲。

$$P(X \geq 90) = 0.5 - p(2.5) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

確率をパーセントに直すと $0.0062 \times 100 = 0.62$ (%)。

上位 0.62%

ある工場で作られる製品の不良品が出る確率は 0.1 であることがわかっている。この製品を独立に400個検査するとき、不良品の個数を X とする。 X を正規分布で近似して、 $P(28 \leq X \leq 52)$ を求めよ。

$$P(28 \leq X \leq 52) = \underline{0.9544}$$

$X \sim B(400, 0.1)$ なので

$$\mu = E(X) = 400 \times 0.1 = 40$$

$$V(X) = 400 \times 0.1 \times 0.9 = 36, \sigma = \sqrt{36} = 6$$

$$Z_1 = \frac{28 - 40}{6} = -2.0, Z_2 = \frac{52 - 40}{6} = 2.0$$

平均40を中心に左右対称な範囲（ $z = 2.0$ の両側）なので

$$P(28 \leq X \leq 52) \approx 2p(2.0) = 2 \times 0.4772 = 0.9544$$

$$P(28 \leq X \leq 52) \approx 0.9544$$

ある試験の得点 X は正規分布 $N(60, 12^2)$ に従うとする。合格ラインを72点に設定するとき、合格者の割合と不合格者の割合はそれぞれ全体の何%か。小数第2位まで、%の数値のみ入力せよ。

合格 15.87 % 不合格 84.13 %

$$\text{合格}=72\text{点以上なので } Z = \frac{72 - 60}{12} = 1.0$$

表より $p(1.0) = 0.3413$ 。

$$P(X \geq 72) = 0.5 - p(1.0) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \text{ (合格率)}$$

パーセントに直すと 15.87%。不合格率は全体からの残りなので

$$100 - 15.87 = 84.13 \text{ (\%)}$$

合格 15.87%、不合格 84.13%

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。コイン投げの正規近似と、模試などでおなじみの「偏差値」の仕組みを、正規分布表を使って読み解こう。

応1

コインを400回投げる正規近似

1枚の公正な硬貨（表と裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ ）を独立に400回投げるとき、表の出る回数を X とする。 X を正規分布で近似するときの平均 μ と標準偏差 σ を求めよ。

$$\mu = \underline{200} \quad \sigma = \underline{10}$$

$X \sim B(400, 0.5)$ なので

$$\mu = E(X) = 400 \times 0.5 = 200$$

$$V(X) = 400 \times 0.5 \times 0.5 = 100, \sigma = \sqrt{100} = 10$$

$$\mu = 200, \sigma = 10$$

応2

続き：中央68.26%の範囲

応1の X （硬貨を400回投げたときの表の回数）について、表の値から $2p(1.0) = 0.6826$ であることがわかる。この「中央68.26%」にあたる範囲は、表の回数が何回から何回までか。

190 回 から 210 回

「中央68.26%」は $2p(1.0)$ にあたるので、 $z = \pm 1.0$ の範囲、つまり $\mu \pm 1\sigma$ の範囲を指す。

応1より $\mu = 200$, $\sigma = 10$ なので

下限： $200 - 1 \times 10 = 190$ 、上限： $200 + 1 \times 10 = 210$

190 回から 210 回まで

応3

続き：極端な場合の確率

応1の X について、 $P(X \geq 230)$ を求めよ。

$P(X \geq 230) =$ 0.0013

応1より $\mu = 200$, $\sigma = 10$ 。

$$Z = \frac{230 - 200}{10} = 3.0$$

表より $p(3.0) = 0.4987$ 。「230回以上」は平均より先の端までの範囲。

$$P(X \geq 230) \approx 0.5 - p(3.0) = 0.5 - 0.4987 = 0.0013$$

(400回投げて230回以上表が出るのは、非常に起こりにくい珍しい出来事だとわかる)

$$P(X \geq 230) \approx 0.0013$$

模試などで使われる「偏差値」は、平均を50、標準偏差を10にそろえた指標で、得点 x 、平均 m 、標準偏差 s を使って次の式で計算される。

$$\text{偏差値} = 50 + 10 \times \frac{x - m}{s}$$

ある試験の平均点が 60点、標準偏差が 12点であった。得点 78点だった生徒の偏差値を求めよ。

偏差値 **65**

まず標準化した値（これが偏差値の式の $\frac{x - m}{s}$ の部分にあたる）を求める。

$$\frac{x - m}{s} = \frac{78 - 60}{12} = \frac{18}{12} = 1.5$$

これを偏差値の式に代入する。

$$\text{偏差値} = 50 + 10 \times 1.5 = 50 + 15 = 65$$

偏差値 **65**

応4の式で偏差値を計算すると、偏差値と $Z = \frac{x - m}{s}$ の間には 偏差値 = $50 + 10Z$ 、つまり $Z = \frac{\text{偏差値} - 50}{10}$ の関係がある。得点が正規分布に従うとして、偏差値70の生徒は、全体の上位何%にあたるか。小数第2位まで、%の数値のみ入力せよ。

上位 2.28 %

偏差値70に対応する Z の値は

$$Z = \frac{70 - 50}{10} = 2.0$$

表より $p(2.0) = 0.4772$ 。「偏差値70以上」は平均より先の端までの範囲。

$$P(Z \geq 2.0) = 0.5 - p(2.0) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

パーセントに直すと $0.0228 \times 100 = 2.28$ (%)。

（偏差値70は「上位2.28%」、つまりかなり上位に入る得点だということが、正規分布表から読み取れる）

上位 2.28%