

確率変数と確率分布

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

期待値の基本

1枚の硬貨を1回投げ、表が出たら1点、裏が出たら0点を得るとする。得点を X とするとき、期待値 $E(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{1/2}$$

確率分布表は $X = 1, 0$ がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ 。

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

2

期待値の基本・さいころ

1個のさいころを1回投げるとき、出る目 X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{7/2}$$

$$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ がそれぞれ確率 } \frac{1}{6}。 \\ E(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E(X) = \frac{7}{2}$$

3

分散の基本（問2の続き）

問2の X （さいころの出る目）について、分散 $V(X)$ を求めよ。

$$V(X) = \underline{35/12}$$

$$E(X) = \frac{7}{2} \text{ (問2より)。} \\ E(X^2) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} = \frac{91}{6} \\ V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182}{12} - \frac{147}{12} = \frac{35}{12}$$

$$V(X) = \frac{35}{12}$$

4

確率分布表を作ってから計算

1個のさいころを1回投げ、偶数の目が出たら10点、奇数の目が出たら0点を得るとする。得点を X とするとき、期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{5} \quad V(X) = \underline{25}$$

偶数 (2,4,6) が出る確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 、奇数 (1,3,5) が出る確率も $\frac{1}{2}$ 。よって $X = 10, 0$ がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ 。

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$E(X^2) = 100 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = 50$$

$$V(X) = 50 - 5^2 = 50 - 25 = 25$$

$$E(X) = 5, V(X) = 25$$

5

くじの期待値

10本中2本が当たり（賞金100円）、8本がはずれ（賞金0円）のくじがある。1本引いて当たった金額を X とするとき、期待値 $E(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{20}$$

$X = 100, 0$ がそれぞれ確率 $\frac{2}{10}, \frac{8}{10}$ 。

$$E(X) = 100 \times \frac{2}{10} + 0 \times \frac{8}{10} = 20$$

$$E(X) = 20 \text{ (円)}$$

6

くじの分散（問5の続き）

問5の X （くじの当たり金額）について、分散 $V(X)$ を求めよ。

$$V(X) = \underline{1600}$$

$$E(X) = 20 \text{（問5より）}。$$

$$E(X^2) = 100^2 \times \frac{2}{10} + 0^2 \times \frac{8}{10} = 10000 \times 0.2 = 2000$$

$$V(X) = 2000 - 20^2 = 2000 - 400 = 1600$$

$$V(X) = 1600$$

標準（7～12）

7

 $aX+b$ の期待値

1個のさいころを1回投げて出た目を X とする。 $Y = 3X - 2$ とするとき、期待値 $E(Y)$ を求めよ。

$$E(Y) = \underline{17/2}$$

$$E(X) = \frac{7}{2}。$$

$$E(Y) = E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 3 \times \frac{7}{2} - 2 = \frac{21}{2} - 2 = \frac{17}{2}$$

$$E(Y) = \frac{17}{2}$$

8

aX+b の分散（問7の続き）

問7の $Y = 3X - 2$ について、分散 $V(Y)$ を求めよ。

$$V(Y) = \underline{105/4}$$

$$V(X) = \frac{35}{12}。$$

$$V(Y) = V(3X - 2) = 3^2 V(X) = 9 \times \frac{35}{12} = \frac{315}{12} = \frac{105}{4}$$

$$V(Y) = \frac{105}{4}$$

9

独立な和の期待値

2個のさいころを同時に投げるとき、出た目の和 $X + Y$ の期待値 $E(X + Y)$ を求めよ。

$$E(X + Y) = \underline{7}$$

$$1\text{個のさいころの期待値は } E(X) = E(Y) = \frac{7}{2}。$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

$$E(X + Y) = 7$$

10

独立な和の分散（問9の続き）

問9の X, Y （2個のさいころの目、独立）について、分散 $V(X + Y)$ を求めよ。

$$V(X + Y) = \underline{35/6}$$

$$V(X) = V(Y) = \frac{35}{12}。X, Y \text{ は独立なので}$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} = \frac{35}{6}$$

$$V(X + Y) = \frac{35}{6}$$

11

与えられた分布表から計算

硬貨を3枚投げて表の出た枚数を X とする。 X の確率分布は下の表の通りである。期待値 $E(X)$ を求めよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X) = \underline{3/2}$$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{0 + 3 + 6 + 3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X) = \frac{3}{2}$$

12

与えられた分布表から計算（問11の続き）

問11の X （3枚の硬貨の表の枚数）について、分散 $V(X)$ を求めよ。

$$V(X) = \underline{3/4}$$

$$E(X) = \frac{3}{2} \text{ (問11より)}.$$

$$E(X^2) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{1}{8} = \frac{0 + 3 + 12 + 9}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$V(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

$$V(X) = \frac{3}{4}$$

挑戦 (13~16)

13

3通りの賞金があるくじ

1等 (500円) が1本、2等 (100円) が2本、はずれ (0円) が7本、計10本のくじがある。1本引いて当たった金額を X とするとき、期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{70} \quad V(X) = \underline{22100}$$

$X = 500, 100, 0$ がそれぞれ確率 $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{7}{10}$ 。

$$E(X) = 500 \times \frac{1}{10} + 100 \times \frac{2}{10} + 0 \times \frac{7}{10} = 50 + 20 = 70$$

$$E(X^2) = 500^2 \times \frac{1}{10} + 100^2 \times \frac{2}{10} = 25000 + 2000 = 27000$$

$$V(X) = 27000 - 70^2 = 27000 - 4900 = 22100$$

$$E(X) = 70 \text{ (円)}, V(X) = 22100$$

14

係数が負の $aX+b$

1個のさいころを1回投げて出た目を X とする。 $Y = -2X + 5$ とするとき、期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めよ。

$$E(Y) = \underline{-2} \quad V(Y) = \underline{35/3}$$

$$E(X) = \frac{7}{2}, V(X) = \frac{35}{12}。$$

$$E(Y) = -2E(X) + 5 = -2 \times \frac{7}{2} + 5 = -7 + 5 = -2$$

$$V(Y) = (-2)^2 V(X) = 4 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{3}$$

(分散は係数を2乗するので符号は消える。負の係数でも $V(Y)$ は正のまま)

$$E(Y) = -2, V(Y) = \frac{35}{3}$$

2個のさいころを同時に投げ、出た目の和を $S = X + Y$ (X, Y は独立) とする。 $Z = 2S - 1$ とするとき、期待値 $E(Z)$ と分散 $V(Z)$ を求めよ。

$$E(Z) = \underline{13} \quad V(Z) = \underline{70/3}$$

まず S の期待値・分散を求める (問9・問10と同じ)。

$$E(S) = E(X) + E(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

$$V(S) = V(X) + V(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6} \quad (X, Y \text{ 独立})$$

次に $Z = 2S - 1$ に公式をあてはめる。

$$E(Z) = 2E(S) - 1 = 2 \times 7 - 1 = 13$$

$$V(Z) = 2^2 V(S) = 4 \times \frac{35}{6} = \frac{140}{6} = \frac{70}{3}$$

$$E(Z) = 13, V(Z) = \frac{70}{3}$$

硬貨を1枚投げて、表が出たら3点、裏が出たら−1点を得るとする。この試行を独立に2回行い、得点の合計を T とする。期待値 $E(T)$ と分散 $V(T)$ を求めよ。

（まず1回分の得点 X について $E(X)$, $V(X)$ を求めてから考えよう）

$$E(T) = \underline{2} \quad V(T) = \underline{8}$$

1回分の得点を X とすると、 $X = 3, -1$ がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ 。

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 1$$

$$E(X^2) = 9 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$V(X) = 5 - 1^2 = 4$$

2回の試行（それぞれの得点を X_1, X_2 とする）は独立で、どちらも X と同じ分布に従う。

合計 $T = X_1 + X_2$ 。

$$E(T) = E(X_1) + E(X_2) = 1 + 1 = 2$$

$$V(T) = V(X_1) + V(X_2) = 4 + 4 = 8 \quad (\text{独立なので分散はたし算できる})$$

$$E(T) = 2, V(T) = 8$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。分布表を自分で作る問題や、公式を組み合わせる問題に挑戦しよう。

応1

分布表を自分で作る

硬貨を2枚投げて、表の出た枚数を X とする。確率分布表を自分で作り、期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{1} \quad V(X) = \underline{1/2}$$

2枚の硬貨の出方は「表表」「表裏」「裏表」「裏裏」の4通りで、それぞれ確率 $\frac{1}{4}$ 。表の枚数 X はそれぞれ 2, 1, 1, 0。

同じ値をまとめると分布表は次の通り。

$X = 0$: 裏裏の1通り → 確率 $\frac{1}{4}$

$X = 1$: 表裏・裏表の2通り → 確率 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$X = 2$: 表表の1通り → 確率 $\frac{1}{4}$

(確認: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$ OK)

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$E(X^2) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = 1, V(X) = \frac{1}{2}$$

2個のさいころを同時に投げる。それぞれの出た目を X, Y (独立) とするとき、和の期待値 $E(X + Y)$ と、積の期待値 $E(XY)$ をそれぞれ求めよ。

$$E(X + Y) = \underline{7} \quad E(XY) = \underline{49/4}$$

$$E(X) = E(Y) = \frac{7}{2}。$$

和については、独立かどうかに関わらず常に成り立つ公式を使う。

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

積については、 X, Y が独立なときだけ成り立つ公式 $E(XY) = E(X)E(Y)$ を使う。

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

$$E(X + Y) = 7、E(XY) = \frac{49}{4} (= 12.25)$$

2個のさいころを同時に投げ、出た目をそれぞれ X, Y （独立）とする。 $Z = 3X - 2Y + 4$ とするとき、期待値 $E(Z)$ と分散 $V(Z)$ を求めよ。

$$E(Z) = \underline{15/2} \quad V(Z) = \underline{455/12}$$

$$E(X) = E(Y) = \frac{7}{2}, \quad V(X) = V(Y) = \frac{35}{12}。$$

期待値は独立でなくても常に「係数をかけて足す」だけでよい。

$$E(Z) = 3E(X) - 2E(Y) + 4 = 3 \times \frac{7}{2} - 2 \times \frac{7}{2} + 4 = \frac{21}{2} - 7 + 4 = \frac{21}{2} - 3 = \frac{15}{2}$$

分散は「係数を2乗してからたす」。定数 +4 は分散に影響しない。 X, Y が独立なので、掛け算部分（クロス項）は現れず単純にたし算できる。

$$V(Z) = 3^2V(X) + (-2)^2V(Y) = 9 \times \frac{35}{12} + 4 \times \frac{35}{12} = (9 + 4) \times \frac{35}{12} = 13 \times \frac{35}{12} = \frac{455}{12}$$

$$E(Z) = \frac{15}{2}, \quad V(Z) = \frac{455}{12}$$

1等（200円）が1本、2等（50円）が3本、はずれ（0円）が6本、計10本のくじがある。1本引いて当たった金額を X とする。まず1回分の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。さらに、この抽選を独立に2回行うときの合計金額を T とし、 $E(T)$ 、 $V(T)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{35} \quad V(X) = \underline{3525}$$

$$E(T) = \underline{70} \quad V(T) = \underline{7050}$$

$X = 200, 50, 0$ がそれぞれ確率 $\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}$ 。

$$E(X) = 200 \times \frac{1}{10} + 50 \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{6}{10} = 20 + 15 = 35$$

$$E(X^2) = 200^2 \times \frac{1}{10} + 50^2 \times \frac{3}{10} = 4000 + 750 = 4750$$

$$V(X) = 4750 - 35^2 = 4750 - 1225 = 3525$$

2回の抽選（それぞれの当たり金額を X_1, X_2 とする）は独立で、どちらも X と同じ分布に従う。合計は $T = X_1 + X_2$ 。

$$E(T) = E(X_1) + E(X_2) = 35 + 35 = 70$$

$$V(T) = V(X_1) + V(X_2) = 3525 + 3525 = 7050 \quad (\text{独立なので分散はたし算できる})$$

1回分： $E(X) = 35$ 、 $V(X) = 3525$ / 2回の合計： $E(T) = 70$ 、 $V(T) = 7050$

1個のさいころを1回投げて出た目を X とする。 $Y = aX + b$ ($a > 0$) とするとき、 $E(Y) = 10$ 、 $V(Y) = \frac{35}{3}$ となるように a , b の値を定めよ。

$$a = \underline{2} \quad b = \underline{3}$$

$$E(X) = \frac{7}{2}, V(X) = \frac{35}{12} \text{ (STEP2より)}.$$

分散の式から先に a を決める。

$$V(Y) = a^2 V(X) \text{ より } \frac{35}{3} = a^2 \times \frac{35}{12}$$

$$a^2 = \frac{35}{3} \div \frac{35}{12} = \frac{35}{3} \times \frac{12}{35} = 4$$

$a > 0$ より $a = 2$ 。

次に期待値の式から b を決める。

$$E(Y) = aE(X) + b \text{ より } 10 = 2 \times \frac{7}{2} + b = 7 + b$$

$$b = 3$$

$$a = 2, b = 3$$