

数B まとめ

問題プリント（全42問）

氏名 _____

得点 /42点

DRILL

まとめテスト（標準）

標準正規分布表（抜粋） $p(z) = P(0 \leq Z \leq z)$

z	1.0	2.0	3.0
$p(z)$	0.3413	0.4772	0.4987

このテストの正規分布の問題は、すべてこの3つの z の値（またはその負の側）だけで解ける。

基本（1～20）

1 等差数列・一般項

数列 5, 12, 19, 26, ... は等差数列である。公差 d と、一般項を $a_n = pn + q$ の形で表したときの p, q を求めよ。

$d =$ $p =$ $q =$

2 等差数列・特定項（公差が負）

初項10、公差 -4 の等差数列の第12項を求めよ。

$a_{12} =$

3 等差数列・和

初項5、公差6の等差数列について、初項から第20項までの和 S_{20} を求めよ。

$S_{20} =$

4 等比数列・特定項

初項3、公比2の等比数列の第6項を求めよ。

$a_6 =$

5 等比数列・和（公比が負）

初項4、公比 -3 の等比数列について、初項から第4項までの和 S_4 を求めよ。

$S_4 =$

6 Σ の基本公式

$\sum_{k=1}^7 k$ の値を求めよ。

値

7 Σ の基本公式 (k^2)

$\sum_{k=1}^6 k^2$ の値を求めよ。

値

8

Σの計算（2項に分ける）

$$\sum_{k=1}^5 (2k+3) \text{ の値を求めよ。}$$

値

9

階差数列

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 3$ 、階差数列 $b_n = 2n + 1$ ($b_n = a_{n+1} - a_n$) を満たす。 a_5 を求めよ。

 $a_5 =$

10

漸化式（等差型）

$a_1 = 6$, $a_{n+1} = a_n + 5$ の一般項を $a_n = pn + q$ の形で表すとき、 p , q を求めよ。

 $p =$ $q =$

11

期待値の基本

1個のさいころを1回投げ、出た目が偶数なら10点、奇数なら0点を得るとする。得点を X とするとき、期待値 $E(X)$ を求めよ。

 $E(X) =$

12

分散の基本（問11の続き）

問11の X について、分散 $V(X)$ を求めよ。

 $V(X) =$

13

 $aX+b$ の公式

確率変数 X が $E(X) = 8$, $V(X) = 5$ を満たすとき、 $Y = 3X - 2$ の期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めよ。

 $E(Y) =$ $V(Y) =$

14

独立な和の公式

独立な確率変数 X, Y が $E(X) = 6$, $E(Y) = 9$, $V(X) = 4$, $V(Y) = 7$ を満たすとき、 $S = X + Y$ の期待値 $E(S)$ と分散 $V(S)$ を求めよ。

 $E(S) =$ $V(S) =$

15

二項分布の期待値

成功確率 $\frac{1}{4}$ の試行を独立に48回くり返す。成功した回数を X とするとき、期待値 $E(X)$ を求めよ。

 $E(X) =$

16

二項分布の分散・標準偏差（問15の続き）

問15の X ($B\left(48, \frac{1}{4}\right)$) について、分散 $V(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

 $V(X) =$ $\sigma(X) =$

17

標準化の基本

$X \sim N(70, 6^2)$ のとき、 $X = 82$ を標準化した値 Z を求めよ。

 $Z =$

18

正規分布表の基本的読み方（問17の続き）

問17の $X \sim N(70, 6^2)$ について、 $P(70 \leq X \leq 82)$ を求めよ。

 $P(70 \leq X \leq 82) =$

19

正規分布表・両側対称パターン

$X \sim N(70, 6^2)$ のとき、 $P(58 \leq X \leq 82)$ を求めよ。

 $P(58 \leq X \leq 82) =$

20

母平均の95%信頼区間

母標準偏差20の母集団から、大きさ100の標本を抽出したところ、標本平均が150であった。母平均の95%信頼区間を求めよ。

下限

上限

標準（21～34）

21

等差数列・2条件から和の最大

ある等差数列で、第3項が17、第8項が−3であるとき、初項から第 n 項までの和が最大になるときの n と、その最大値を求めよ。

 $n =$

最大値

22

Snからanを求める (n≥2の場合分け)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $S_n = 2n^2 + 3n + 4$ で表されるとき、 a_1 を求めよ。
 また $n \geq 2$ のときの一般項を $a_n = pn + q$ の形で表し、 p, q を求めよ (この式が $n = 1$ でも成り立つかどうか確かめること)。

$$a_1 = \boxed{} \quad p = \boxed{} \quad q = \boxed{}$$

23

漸化式 (pan+q型・特性方程式)

$a_1 = 5, a_{n+1} = 4a_n - 9$ について、特性方程式の解 α と a_4 を求めよ。

$$\alpha = \boxed{} \quad a_4 = \boxed{}$$

24

数学的帰納法・等式 (Σとの融合)

等式 $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ を数学的帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき左辺・右辺の値、また $n = 5$ のときの右辺の値を求めよ。

$$n=1 \text{ の左辺 } \boxed{} \quad n=1 \text{ の右辺 } \boxed{}$$

$$\boxed{} \quad n=5 \text{ の右辺 } \boxed{}$$

25

部分分数分解 (となり合う項が打ち消し合う型)

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

 を用いて $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を計算すると $\frac{n}{2n+\text{ア}}$ の形になる。アの値と、 $n = 6$ のときの値を求めよ。

$$\text{ア} = \boxed{} \quad n=6 \text{ のときの値 } \boxed{}$$

26

融合：確率分布とΣkの公式

確率変数 X は 1, 2, 3, 4, 5 の値をとり、確率は $P(X = k) = ck$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, c$ は定数) で与えられる。確率の総和が1であることを使って定数 c を求めよ。また期待値 $E(X)$ を求めよ。

$$c = \boxed{} \quad E(X) = \boxed{}$$

27

融合：独立な和とΣc=ncの公式

硬貨を8回投げるとき、表の出る回数を X とする。 i 回目の試行が表なら1、裏なら0となる確率変数を X_i とし、 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_8$ と表す。 $E(X_i)$ の値と、Σの考え方 (すべて同じ値をn個足す) を用いて $E(X)$ を求めよ。

$$E(X_i) = \boxed{} \quad E(X) = \boxed{}$$

28

正規分布表・平均から片側ずつ足すパターン

$X \sim N(60, 8^2)$ のとき、 $P(52 \leq X \leq 84)$ を求めよ。



52は平均より左側、84は平均より右側にある。左右で別々のzを求めてから、それぞれの面積をたし合わせる。

$$P(52 \leq X \leq 84) = \boxed{}$$

29

二項分布の正規近似・外側から内側を引くパターン

成功確率0.5の試行を独立に256回くり返す。成功した回数を X とする。 X を正規分布で近似して、 $P(104 \leq X \leq 120)$ を求めよ。

$$P(104 \leq X \leq 120) = \boxed{}$$

30

母比率の95%信頼区間

400人にアンケートを行ったところ、200人がある提案に賛成と回答した。賛成率 (母比率) の95%信頼区間を求めよ。

$$\text{下限 } \boxed{} \quad \text{上限 } \boxed{}$$

31

仮説検定・両側検定

母標準偏差15の母集団について、帰無仮説 $H_0: \mu = 80$ を有意水準5%で両側検定する。大きさ225の標本の標本平均が83であったとき、 z の値と結論を求めよ。

$z =$ 結論

(棄却できる / 棄却できない)

32

融合：期待値の計算と Σk^2 の公式

1個のさいころを1回投げ、出た目を X とする。 $Y = X^2$ とするとき、期待値 $E(Y)$ を Σ の公式を用いて求めよ。

$E(Y) =$

33

信頼区間の誤差から必要な標本数を求める

母標準偏差が20と分かっている母集団について、信頼度95%の信頼区間の誤差 ($1.96\sigma/\sqrt{n}$) を2以下にしたい。必要な標本の大きさの最小値を求めよ (小数点以下切り上げ)。

最小の n

34

漸化式との融合 (推測してから帰納法で証明)

$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - 2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = A \cdot 3^{n-1} + C$ の形に推測したとき、 A, C の値を求めよ。また a_6 の値を求めよ。

$A =$ $C =$

$a_6 =$

発展 (35~40)

35

融合： n 個の試行の和の期待値・分散

1個のさいころを n 回投げ、出た目の合計を S_n とする。1回分の出た目を確率変数 X とすると $E(X) = \frac{7}{2}, V(X) = \frac{35}{12}$ であることが知られている。和の期待値の公式 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ と、各回が独立であることを用いて、 $E(S_n), V(S_n)$ を n の式で表せ。また $n = 90$ のときのそれぞれの値を求めよ。

$E(S_{90}) =$ $V(S_{90}) =$

36

漸化式・おきかえ型 (右辺に 2^n が付く)

$a_1 = 4, a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 2^n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、 a_3 と a_5 を求めよ。

$a_3 =$ $a_5 =$

37

推定・検定の総合 (不偏分散→標本平均の標準偏差→信頼区間→検定)

ある工場の1日の生産個数について、大きさ16の標本をとったところ、標本平均が505、不偏分散 $u^2 = 400$ であった。この u を母標準偏差の代わりに用いて、標本平均の標準偏差 $\frac{u}{\sqrt{n}}$ の値と母平均の95%信頼区間を求めよ。さらに、帰無仮説 $H_0: \mu = 500$ を有意水準5%で両側検定し、 z の値と結論を求めよ。

$\frac{u}{\sqrt{n}}$ の値 信頼区間の下限

上限

$z =$ 結論

(棄却できる / 棄却できない)

38

いろいろな数列の和 (等差×等比型の Σ)

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + (2n - 1) \cdot 3^{n-1}$ を満たす。 a_4 を求めよ。また一般項が $a_n = 2 + (n - 2) \cdot 3^{n-1}$ と表せることを用いて a_6 を求めよ。

$a_4 =$ $a_6 =$

39

融合：独立な和の公式を n 個の同じ分布に拡張

2種類の独立なゲームがある。ゲームAの獲得ポイントは期待値6・分散8、ゲームBの獲得ポイントは期待値9・分散5 (AとBは互いに独立)。両方のゲームに1回ずつ挑戦したときの合計ポイントを T とするとき $E(T), V(T)$ を求めよ。またゲームAだけに独立に3回挑戦したときの合計ポイントを U とするとき $E(U), V(U)$ を求めよ。

$E(T) =$ $V(T) =$

$E(U) =$ $V(U) =$

40

融合：どの値も同じ確率でとる分布の期待値・分散を $\sum k, \sum k^2$ から導く（章の総仕上げ）

確率変数 X は 1 から n までの整数値を、それぞれ確率 $\frac{1}{n}$ で等しくとる。 $\sum k$ の公式・ $\sum k^2$ の公式を用いて $E(X)$ 、 $V(X)$ を n の式で表せ。また $n = 20$ のときのそれぞれの値を求めよ。

$$E(X) (n = 20) = \boxed{}$$

$$V(X) (n = 20) = \boxed{}$$

DRILL 記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 まとめテストの問26では、確率変数 X （1, 2, 3, 4, 5 の値をとる）が $P(X = k) = ck$ という、確率が一様ではない分布に従っていた。この問題で定数 c や期待値 $E(X)$ を求めるのに使った $\sum k$ の公式・ $\sum k^2$ の公式が、さいころのように確率が全部同じ場合だけでなく、確率が k に比例するような一様でない場合にもそのまま使えるのはなぜか、問26の実際の数値を使って説明せよ。

記2 まとめテストの問34（漸化式 $a_{n+1} = 3a_n - 2$ を数学的帰納法で証明する問題）と問31（帰無仮説 $H_0: \mu = 80$ を検定する問題）は、扱う内容はまったく異なるが、論証の「型」に共通点がある。それぞれで実際に何を仮定し、何を計算し、どんな基準で結論を出しているかを、2問の実際の数値を挙げながら対比して説明せよ。

E X A M

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 12分／配点 20点

太郎さんの通う高校の吹奏楽部では、新入部員数の予測モデルを考えている。1年目の新入部員数は30人であった。先生の説明によると、ある年の新入部員数 a_n （人）から翌年の新入部員数 a_{n+1} （人）は、 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 20$ という式で予測できるという。この a_n は人数の目安を表す予測値であり、小数のまま扱ってよい。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「この式を漸化式とみて、特性方程式を使うと一般項が求められるよ。」

太郎「特性方程式は $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 20$ を解けばいいんですね。」

- (1) 特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 20$ を解くと、 $\alpha =$ アイ である。これは、年数が十分に経ったときにこの新入部員数が近づいていく値を表している。

アイ

- (2) もとの漸化式と(1)の特性方程式を辺々引くことで、一般項は $a_n =$ ウエ $-$ オカ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ と表せる。ウエ、オカの値を求めよ。

ウエ オカ

- (3) (2)の結果を用いて $n = 4$ と $n = 5$ のときの a_n をそれぞれ計算することで、新入部員数がはじめて39人を超えるのは キ 年目であることがわかる。

キ

大問2 目標時間 12分／配点 20点

花子さんのクラスでは、文化祭の射的コーナーの景品準備を検討している。1回の射的で的に命中する確率はおよそ0.4と見込まれており、1人のお客さんが独立に150回挑戦できるとする。先生と花子さんは、命中回数の散らばり方から必要な景品数を考えている。

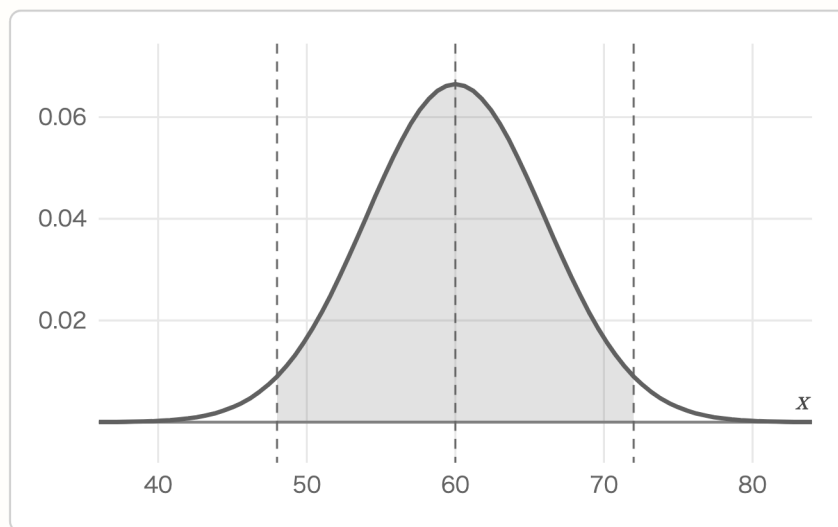
先生「150回のうち、命中した回数を X としよう。それぞれの回は独立で、命中する確率はいつも0.4とみなせるね。」
花子「じゃあ X は二項分布に従いますね。まず平均と分散を求めてみます。」

- (1) $X \sim B(150, 0.4)$ であるとして、期待値 $E(X) = \boxed{\text{アイ}}$ 、分散 $V(X) = \boxed{\text{ウエ}}$ を求めよ。

アイ ウエ

- (2) 先生「 X を正規分布で近似して、命中回数が48回から72回までにおさまる確率を調べてみよう。」

(1)の結果より $\sigma = \sqrt{V(X)} = 6$ である。正規近似を用いてこの確率をパーセントで求めると $\boxed{\text{オカ.キク}}\%$ である。



平均60を中心に左右対称な範囲 ($\pm 2\sigma$) なので、表の値を2倍すればよい。

オカ.キク

- (3) 先生「実際に150回試したお客さんの記録を見たら、命中回数がちょうど(1)の期待値と同じ60回だったよ。(2)で求めた95.44%は、平均 $\pm 2\sigma$ の範囲に入る確率だったね。今度は同じ考え方を $\pm 1.96\sigma$ の範囲にあてはめて、命中率の母比率 p の95%信頼区間を求めてみよう。」

標本比率 $\hat{p} = \frac{60}{150} = 0.4$ を用いると、標本比率の標準偏差は $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ (既約分数で答えよ) であり、母比率

の95%信頼区間は $0.\boxed{\text{シスセソ}} \leq p \leq 0.\boxed{\text{タチツテ}}$ である。

ケ コサ シスセソ タチツテ

大問3 目標時間 11分 / 配点 20点

花子さんのクラスでは、文化祭の福引きの景品構成を考えている。1等から5等まであり、 k 等のくじは k 本ずつ用意する（1等は1本、2等は2本、…、5等は5本）。 k 等が当たったときの賞金は $(6 - k) \times 100$ 円とする（1等は500円、5等は100円）。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「まずは、くじの総本数から求めてみよう。」

太郎「1等1本、2等2本、…と足していけばいいので、 $\sum k$ の公式が使えますね。」

- (1) くじの総本数を、 $\sum k$ の公式を用いて求めよ。総本数は 本である。

アイ

- (2) 花子「くじを1本引いたときの賞金を確率変数 X とすると、 k 等が当たる確率は $\frac{k}{15}$ ですね。期待値を求めるには $\sum_{k=1}^5 k(6 - k)$ の値が必要になりそうです。」

$\sum_{k=1}^5 k(6 - k) = 6 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 k^2$ と変形できる。 $6 \sum_{k=1}^5 k =$ 、 $\sum_{k=1}^5 k^2 =$ より、 $\sum_{k=1}^5 k(6 - k) =$ である。

ウエ オカ キク

- (3) (1)(2)の結果を用いて、賞金 X の期待値 $E(X)$ を円単位で求めよ（既約分数で答えよ）。 $E(X) =$

円である。

ケコサ シ