

数B まとめ

解答（全42問）

氏名 _____

得点 _____ / 42点

DRILL

まとめテスト（標準）

標準正規分布表（抜粋） $p(z) = P(0 \leq Z \leq z)$

z	1.0	2.0	3.0
$p(z)$	0.3413	0.4772	0.4987

このテストの正規分布の問題は、すべてこの3つの z の値（またはその負の側）だけで解ける。

基本（1～20）

1

等差数列・一般項

数列 5, 12, 19, 26, ... は等差数列である。公差 d と、一般項を $a_n = pn + q$ の形で表したときの p, q を求めよ。

$$d = \underline{7} \quad p = \underline{7} \quad q = \underline{-2}$$

隣り合う項の差より $d = 12 - 5 = 7$ 。

一般項は $a_n = 5 + (n - 1) \times 7 = 7n - 2$ 。

$$d = 7, p = 7, q = -2$$

2

等差数列・特定項（公差が負）

初項10、公差 -4 の等差数列の第12項を求めよ。

$$a_{12} = \underline{-34}$$

$$a_n = 10 + (n - 1) \times (-4)$$

$$a_{12} = 10 + 11 \times (-4) = 10 - 44 = -34$$

$$a_{12} = -34$$

3

等差数列・和

初項5、公差6の等差数列について、初項から第20項までの和 S_{20} を求めよ。

$$S_{20} = \underline{1240}$$

$$a_n = 5 + (n - 1) \times 6 = 6n - 1$$

$$a_{20} = 6 \times 20 - 1 = 119$$

$$S_{20} = \frac{20(a_1 + a_{20})}{2} = \frac{20(5 + 119)}{2} = 10 \times 124 = 1240$$

$$S_{20} = 1240$$

4

等比数列・特定項

初項3、公比2の等比数列の第6項を求めよ。

$$a_6 = \underline{96}$$

$$\text{一般項は } a_n = 3 \cdot 2^{n-1}。$$

$$a_6 = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$$

$$a_6 = 96$$

5

等比数列・和（公比が負）

初項4、公比 -3 の等比数列について、初項から第4項までの和 S_4 を求めよ。

$$S_4 = \underline{-80}$$

$$S_4 = \frac{4\{(-3)^4 - 1\}}{-3 - 1} = \frac{4 \times 80}{-4} = -80$$

$$\text{検算：} 4 - 12 + 36 - 108 = -80$$

$$S_4 = -80$$

6

 Σ の基本公式

$\sum_{k=1}^7 k$ の値を求めよ。

$$\text{値 } \underline{28}$$

$$\sum_{k=1}^7 k = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 = 28$$

$$28$$

7

 Σ の基本公式 (k^2)

$\sum_{k=1}^6 k^2$ の値を求めよ。

$$\text{値 } \underline{91}$$

$$\sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 = 91$$

$$91$$

8

Σの計算（2項に分ける）

$\sum_{k=1}^5 (2k+3)$ の値を求めよ。

値 45

$$\sum_{k=1}^5 (2k+3) = 2 \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 3 = 2 \times 15 + 15 = 45$$

検算： $5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 45$

45

9

階差数列

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 3$ 、階差数列 $b_n = 2n + 1$ ($b_n = a_{n+1} - a_n$) を満たす。 a_5 を求めよ。

$a_5 =$ 27

$$a_5 = a_1 + \sum_{k=1}^4 b_k = 3 + \sum_{k=1}^4 (2k+1) = 3 + (2 \times 10 + 4) = 3 + 24 = 27$$

検算（1歩ずつ）： $a_1 = 3$ 、 $a_2 = 3 + 3 = 6$ ($b_1 = 3$)、 $a_3 = 6 + 5 = 11$ ($b_2 = 5$)、 $a_4 = 11 + 7 = 18$ ($b_3 = 7$)、 $a_5 = 18 + 9 = 27$ ($b_4 = 9$)。

$a_5 = 27$

10

漸化式（等差型）

$a_1 = 6, a_{n+1} = a_n + 5$ の一般項を $a_n = pn + q$ の形で表すとき、 p, q を求めよ。

$$p = \underline{5} \quad q = \underline{1}$$

等差型なので $a_n = a_1 + (n-1) \times 5 = 6 + 5n - 5 = 5n + 1$ 。

$$p = 5, q = 1$$

11

期待値の基本

1個のさいころを1回投げ、出た目が偶数なら10点、奇数なら0点を得るとする。得点を X とするとき、期待値 $E(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{5}$$

偶数 (2,4,6) が出る確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。よって $X = 10, 0$ がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ 。

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = 5$$

$$E(X) = 5$$

12

分散の基本（問11の続き）

問11の X について、分散 $V(X)$ を求めよ。

$$V(X) = \underline{25}$$

$E(X) = 5$ （問11より）。

$$E(X^2) = 10^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times \frac{1}{2} = 50$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 50 - 5^2 = 50 - 25 = 25$$

$$V(X) = 25$$

13

aX+bの公式

確率変数 X が $E(X) = 8$ 、 $V(X) = 5$ を満たすとき、 $Y = 3X - 2$ の期待値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めよ。

$$E(Y) = \underline{22} \quad V(Y) = \underline{45}$$

公式にそのまま当てはめる。

$$E(Y) = E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 3 \times 8 - 2 = 22$$

$$V(Y) = V(3X - 2) = 3^2 V(X) = 9 \times 5 = 45$$

$$E(Y) = 22, V(Y) = 45$$

14

独立な和の公式

独立な確率変数 X, Y が $E(X) = 6$ 、 $E(Y) = 9$ 、 $V(X) = 4$ 、 $V(Y) = 7$ を満たすとき、 $S = X + Y$ の期待値 $E(S)$ と分散 $V(S)$ を求めよ。

$$E(S) = \underline{15} \quad V(S) = \underline{11}$$

期待値は独立でなくても常に成り立つ公式を使う。

$$E(S) = E(X) + E(Y) = 6 + 9 = 15$$

分散は X, Y が独立なので、そのままたし算できる。

$$V(S) = V(X) + V(Y) = 4 + 7 = 11$$

$$E(S) = 15, V(S) = 11$$

15

二項分布の期待値

成功確率 $\frac{1}{4}$ の試行を独立に48回繰り返す。成功した回数を X とするとき、期待値 $E(X)$ を求めよ。

$$E(X) = \underline{12}$$

$$X \sim B\left(48, \frac{1}{4}\right)$$
$$E(X) = np = 48 \times \frac{1}{4} = 12$$

$$E(X) = 12$$

16

二項分布の分散・標準偏差（問15の続き）

問15の X ($B\left(48, \frac{1}{4}\right)$) について、分散 $V(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

$$V(X) = \underline{9} \quad \sigma(X) = \underline{3}$$

$$V(X) = np(1-p) = 48 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 9$$
$$\sigma(X) = \sqrt{9} = 3$$

$$V(X) = 9, \sigma(X) = 3$$

17

標準化の基本

$X \sim N(70, 6^2)$ のとき、 $X = 82$ を標準化した値 Z を求めよ。

$$Z = \underline{2}$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{82 - 70}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$Z = 2$$

18

正規分布表の基本の読み方（問17の続き）

問17の $X \sim N(70, 6^2)$ について、 $P(70 \leq X \leq 82)$ を求めよ。

$$P(70 \leq X \leq 82) = \underline{\underline{0.4772}}$$

問17より $Z = 2.0$ 。表より $p(2.0) = 0.4772$ 。平均70から片側だけの範囲なので、そのまま表の値が答え。

$$P(70 \leq X \leq 82) = 0.4772$$

19

正規分布表・両側対称パターン

$X \sim N(70, 6^2)$ のとき、 $P(58 \leq X \leq 82)$ を求めよ。

$$P(58 \leq X \leq 82) = \underline{\underline{0.9544}}$$

左端 $Z_1 = \frac{58 - 70}{6} = -2.0$ 、右端 $Z_2 = \frac{82 - 70}{6} = 2.0$ 。平均70を中心に左右対称な範囲なので

$$P(58 \leq X \leq 82) = 2p(2.0) = 2 \times 0.4772 = 0.9544$$

$$P(58 \leq X \leq 82) = 0.9544$$

20

母平均の95%信頼区間

母標準偏差20の母集団から、大きさ100の標本を抽出したところ、標本平均が150であった。母平均の95%信頼区間を求めよ。

$$\text{下限 } \underline{\underline{146.08}} \quad \text{上限 } \underline{\underline{153.92}}$$

$$\text{標本平均の標準偏差 } \frac{20}{\sqrt{100}} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\text{誤差の範囲 } 1.96 \times 2 = 3.92$$

$$146.08 \leq \mu \leq 153.92$$

ある等差数列で、第3項が17、第8項が -3 であるとき、初項から第 n 項までの和が最大になるときの n と、その最大値を求めよ。

$n = \underline{7}$ 最大値 $\underline{91}$

$$\text{公差は } d = \frac{a_8 - a_3}{8 - 3} = \frac{-3 - 17}{5} = -4。$$

$$\text{初項は } a_1 = a_3 - 2d = 17 - 2 \times (-4) = 17 + 8 = 25。$$

$$a_n = 25 + (n - 1) \times (-4) = 29 - 4n$$

$a_n \geq 0$ を解くと $29 - 4n \geq 0$ より $n \leq 7.25$ 。 n は自然数なので $n = 7$ ($a_7 = 29 - 28 = 1$ は正、 $a_8 = 29 - 32 = -3$ は負で、与えられた $a_8 = -3$ とも一致する)。

$$S_7 = \frac{7(a_1 + a_7)}{2} = \frac{7(25 + 1)}{2} = 7 \times 13 = 91$$

$n = 7$ のとき最大値91

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $S_n = 2n^2 + 3n + 4$ で表されるとき、 a_1 を求めよ。また $n \geq 2$ のときの一般項を $a_n = pn + q$ の形で表し、 p, q を求めよ (この式が $n = 1$ でも成り立つかどうかも確かめること)。

$$a_1 = \underline{9} \quad p = \underline{4} \quad q = \underline{1}$$

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 3 \times 1 + 4 = 9$$

$n \geq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$ を計算する。

$$S_{n-1} = 2(n-1)^2 + 3(n-1) + 4 = 2n^2 - 4n + 2 + 3n - 3 + 4 = 2n^2 - n + 3$$

$$a_n = (2n^2 + 3n + 4) - (2n^2 - n + 3) = 4n + 1 \quad (n \geq 2)$$

この式に $n = 1$ を代入すると $4 \times 1 + 1 = 5$ となるが、実際の $a_1 = 9$ とは一致しない。つまりこの $a_n = 4n + 1$ は $n \geq 2$ でしか使えず、 a_1 は別に求めた値をそのまま使う必要がある。

$a_1 = 9$ 、 $n \geq 2$ のとき $a_n = 4n + 1$ ($p = 4, q = 1$ 、この式は $n=1$ では成り立たない)

$a_1 = 5, a_{n+1} = 4a_n - 9$ について、特性方程式の解 α と a_4 を求めよ。

$$\alpha = \underline{3} \quad a_4 = \underline{131}$$

$$\alpha = 4\alpha - 9 \text{ より } -3\alpha = -9, \alpha = 3。$$

$$a_n - 3 = (a_1 - 3)4^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1} \text{ より } a_n = 2 \cdot 4^{n-1} + 3。$$

検算 (1歩ずつ) : $a_1 = 5, a_2 = 4 \times 5 - 9 = 11, a_3 = 4 \times 11 - 9 = 35, a_4 = 4 \times 35 - 9 = 131。$

$$\alpha = 3, a_4 = 131$$

等式 $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ を数学的帰納法で証明する。 $n=1$ の

とき左辺・右辺の値、また $n=5$ のときの右辺の値を求めよ。

$n=1$ の左辺 2 $n=1$ の右辺 2 $n=5$ の右辺 70

(i) $n=1$: 左辺 $= 1 \times 2 = 2$ 、右辺 $= \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$ 。一致するので成り立つ。

(ii) $n=k$ で成り立つと仮定 : $\sum_{j=1}^k j(j+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ 。両辺に次の項 $(k+1)(k+2)$ を加えると

$$\sum_{j=1}^{k+1} j(j+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

右辺を $(k+1)(k+2)$ でくくると

$$= (k+1)(k+2) \left(\frac{k}{3} + 1 \right) = (k+1)(k+2) \times \frac{k+3}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

これは $n=k+1$ の場合の右辺と一致する。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で成り立つ** ($n=5$ の右辺は $\frac{5 \times 6 \times 7}{3} = 70$ 、検算 : $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 6 = 2 + 6 + 12 + 20 + 30 = 70$)

$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$ を用いて
 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を計算すると $\frac{n}{2n+1}$ の形になる。アの値と、 $n=6$
 のときの値を求めよ。

ア = 1 n=6のときの値 6/13

与えられた分解式を使ってΣを書き並べる。

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

真ん中が打ち消し合い、最初の $\frac{1}{1}$ と最後の $-\frac{1}{2n+1}$ だけが残る。

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$$

$$n=6 \text{ を代入: } \frac{6}{2 \times 6 + 1} = \frac{6}{13}$$

検算 ($n=2$): 与式は $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{5+1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ 。公式に
 $n=2$ を代入すると $\frac{2}{5}$ で一致。

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}, \quad n=6 \text{ のとき } \frac{6}{13}$$

確率変数 X は $1, 2, 3, 4, 5$ の値をとり、確率は $P(X = k) = ck$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$ 、 c は定数) で与えられる。確率の総和が1であることを使って定数 c を求めよ。また期待値 $E(X)$ を求めよ。

$$c = \underline{1/15} \quad E(X) = \underline{11/3}$$

確率の総和が1になる条件より

$$\sum_{k=1}^5 ck = c \sum_{k=1}^5 k = c \times 15 = 1$$

(Σk の公式を使った。ここが数列の章の技術がそのまま使われる場面)

$$\text{よって } c = \frac{1}{15}.$$

期待値は定義どおり Σ で計算する。

$$E(X) = \sum_{k=1}^5 k \times ck = c \sum_{k=1}^5 k^2 = \frac{1}{15} \times 55 = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

(ここでは Σk^2 の公式 $\frac{1}{6} \times 5 \times 6 \times 11 = 55$ を使った)

$$c = \frac{1}{15}, \quad E(X) = \frac{11}{3}$$

硬貨を8回投げるとき、表の出る回数を X とする。 i 回目の試行が表なら1、裏なら0となる確率変数を X_i とし、 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_8$ と表す。 $E(X_i)$ の値と、 Σ の考え方（すべて同じ値を n 個足す）を用いて $E(X)$ を求めよ。

$$E(X_i) = \underline{1/2} \quad E(X) = \underline{4}$$

X_i は確率 $\frac{1}{2}$ で1、確率 $\frac{1}{2}$ で0をとるので

$$E(X_i) = 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (i = 1, \dots, 8, \text{ どの } i \text{ でも同じ値})$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^8 E(X_i) = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{8\text{個}} = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

（これは $\Sigma c = nc$ の公式そのものである）

二項分布の公式 $E(X) = np$ でも確認すると、 $X \sim B(8, 1/2)$ より $E(X) = 8 \times \frac{1}{2} = 4$ で一致する。

$$E(X_i) = \frac{1}{2}, \quad E(X) = 4$$

$X \sim N(60, 8^2)$ のとき、 $P(52 \leq X \leq 84)$ を求めよ。



52は平均より左側、84は平均より右側にある。左右で別々の z を求めてから、それぞれの面積をたし合わせる。

$$P(52 \leq X \leq 84) = \underline{\underline{0.8400}}$$

左端 $Z_1 = \frac{52 - 60}{8} = -1.0$ 、右端 $Z_2 = \frac{84 - 60}{8} = 3.0$ 。平均60をはさんで左右に z の値が違う範囲なので、片側ずつ求めてたし算する。

$$P(52 \leq X \leq 84) = p(1.0) + p(3.0) = 0.3413 + 0.4987 = 0.8400$$

$$P(52 \leq X \leq 84) = 0.8400$$

成功確率0.5の試行を独立に256回くり返す。成功した回数を X とする。 X を正規分布で近似して、 $P(104 \leq X \leq 120)$ を求めよ。

$$P(104 \leq X \leq 120) = \underline{\underline{0.1574}}$$

$X \sim B(256, 0.5)$ なので

$$\mu = E(X) = 256 \times 0.5 = 128$$

$$V(X) = 256 \times 0.5 \times 0.5 = 64, \sigma = \sqrt{64} = 8$$

$$Z_1 = \frac{104 - 128}{8} = -3.0, Z_2 = \frac{120 - 128}{8} = -1.0$$

両端とも平均128より左側（同じ側）なので、外側から内側を引く。

$$P(104 \leq X \leq 120) \approx p(3.0) - p(1.0) = 0.4987 - 0.3413 = 0.1574$$

$$P(104 \leq X \leq 120) \approx 0.1574$$

400人にアンケートを行ったところ、200人がある提案に賛成と回答した。賛成率（母比率）の95%信頼区間を求めよ。

$$\text{下限 } \underline{\underline{0.451}} \quad \text{上限 } \underline{\underline{0.549}}$$

$$\text{標本比率 } \hat{p} = \frac{200}{400} = 0.5$$

$$\text{標本比率の標準偏差 } \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}} = \sqrt{0.000625} = 0.025$$

$$\text{誤差の範囲 } 1.96 \times 0.025 = 0.049$$

$$0.451 \leq p \leq 0.549$$

母標準偏差15の母集団について、帰無仮説 $H_0: \mu = 80$ を有意水準5%で両側検定する。大きさ225の標本の標本平均が83であったとき、 z の値と結論を求めよ。

$z = \underline{3}$ 結論 (棄却できる) / 棄却できない)

$$z = \frac{83 - 80}{15/\sqrt{225}} = \frac{3}{1} = 3$$

$|z| = 3 > 1.96$ なので棄却域に入る。

$z = 3$ 、帰無仮説を棄却できる

1個のさいころを1回投げ、出た目を X とする。 $Y = X^2$ とするとき、期待値 $E(Y)$ を $\sum$ の公式を用いて求めよ。

$E(Y) = \underline{91/6}$

X は1から6までの目をそれぞれ確率 $\frac{1}{6}$ でとるので

$$E(Y) = E(X^2) = \sum_{k=1}^6 k^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k^2$$

$\sum k^2$ の公式 (数列の章) を使うと $\sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{1}{6} \times 6 \times 7 \times 13 = 91$ なので

$$E(Y) = \frac{91}{6}$$

$$E(Y) = \frac{91}{6}$$

母標準偏差が20と分かっている母集団について、信頼度95%の信頼区間の誤差（ $1.96\sigma/\sqrt{n}$ ）を2以下にしたい。必要な標本の大きさの最小値を求めよ（小数点以下切り上げ）。

最小のn 385

$$\begin{aligned} \text{誤差の条件は } 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}} &\leq 2 \\ \text{両辺を整理すると } \sqrt{n} &\geq \frac{1.96 \times 20}{2} = \frac{39.2}{2} = 19.6 \\ \text{両辺を2乗して } n &\geq 19.6^2 = 384.16 \\ n \text{ は整数なので切り上げて} \\ n &= 385 \end{aligned}$$

$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - 2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、一般項を $a_n = A \cdot 3^{n-1} + C$ の形に推測したとき、 A, C の値を求めよ。また a_6 の値を求めよ。

$$A = \underline{1} \quad C = \underline{1} \quad a_6 = \underline{244}$$

項を計算する。 $a_1 = 2, a_2 = 3 \times 2 - 2 = 4, a_3 = 3 \times 4 - 2 = 10, a_4 = 3 \times 10 - 2 = 28, a_5 = 3 \times 28 - 2 = 82, a_6 = 3 \times 82 - 2 = 244$ 。
それぞれから1を引くと1, 3, 9, 27, 81, 243となり、初項1、公比3の等比数列に見える。よって $a_n - 1 = 1 \cdot 3^{n-1}$ 、すなわち

推測： $a_n = 3^{n-1} + 1$ ($A=1, C=1$)

数学的帰納法で証明する。(i) $n = 1 : 3^0 + 1 = 2$ 。 $a_1 = 2$ と一致するので成り立つ。

(ii) $n = k$ で成り立つと仮定： $a_k = 3^{k-1} + 1$ 。漸化式に代入すると
 $a_{k+1} = 3a_k - 2 = 3(3^{k-1} + 1) - 2 = 3^k + 3 - 2 = 3^k + 1 = 3^{(k+1)-1} + 1$
これは推測した式で n を $k + 1$ に置き換えた式そのものである。

(i)(ii)より **すべての自然数 n で $a_n = 3^{n-1} + 1$ が成り立つ ($a_6=244$)**

1個のさいころを n 回投げ、出た目の合計を S_n とする。1回分の出た目を確率変数 X とすると $E(X) = \frac{7}{2}$ 、 $V(X) = \frac{35}{12}$ であることが知られている。和の期待値の公式 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ と、各回が独立であることを用いて、 $E(S_n)$ 、 $V(S_n)$ を n の式で表せ。また $n = 90$ のときのそれぞれの値を求めよ。

$$E(S_{90}) = \underline{315} \quad V(S_{90}) = \underline{525/2}$$

$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ (X_i は*i*回目に出た目、どれも同じ分布) と考える。

期待値はどの回も同じ値なので、 $\sum c = nc$ の公式がそのまま使える。

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \times \frac{7}{2} = \frac{7n}{2}$$

各回のさいころ投げは独立なので、分散もそのまま計算できる。

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = n \times \frac{35}{12} = \frac{35n}{12}$$

$n = 90$ を代入する。

$$E(S_{90}) = \frac{7 \times 90}{2} = \frac{630}{2} = 315$$

$$V(S_{90}) = \frac{35 \times 90}{12} = \frac{3150}{12} = 262.5$$

$$E(S_n) = \frac{7n}{2}, V(S_n) = \frac{35n}{12} \quad (n = 90 \text{ のとき } E(S_{90}) = 315, V(S_{90}) = 262.5)$$

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 2^n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について、 a_3 と a_5 を求めよ。

$$a_3 = \underline{\underline{40}} \quad a_5 = \underline{\underline{256}}$$

両辺を 2^{n+1} で割り $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{3}{2} \quad \text{すなわち} \quad b_{n+1} = b_n + \frac{3}{2}$$

これは公差 $\frac{3}{2}$ の等差数列。 $b_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ なので

$$b_n = 2 + (n-1) \times \frac{3}{2} = \frac{3n+1}{2}$$

$$a_n = 2^n b_n = 2^{n-1}(3n+1)$$

検算（1步ずつ）： $a_1 = 4$ 、 $a_2 = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 14$ （公式も $2^1 \times 7 = 14$ ）、
 $a_3 = 2 \times 14 + 3 \times 4 = 40$ （公式も $2^2 \times 10 = 40$ ）、 $a_4 = 2 \times 40 + 3 \times 8 = 104$
（公式も $2^3 \times 13 = 104$ ）、 $a_5 = 2 \times 104 + 3 \times 16 = 256$ （公式も $2^4 \times 16 = 256$ ）。

$$a_n = 2^{n-1}(3n+1), \quad a_3 = 40, \quad a_5 = 256$$

ある工場の1日の生産個数について、大きさ16の標本をとったところ、標本平均が505、不偏分散 $u^2 = 400$ であった。この u を母標準偏差の代わりに用いて、標本平均の標準偏差 $\frac{u}{\sqrt{n}}$ の値と母平均の95%信頼区間を求めよ。さらに、帰無仮説

$H_0 : \mu = 500$ を有意水準5%で両側検定し、 z の値と結論を求めよ。

$\frac{u}{\sqrt{n}}$ の値 5 信頼区間の下限 495.2 上限 514.8

$z =$ 1 結論 （棄却できる / 棄却できない）

$$u = \sqrt{400} = 20。標本平均の標準偏差は \frac{u}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{16}} = \frac{20}{4} = 5。$$

信頼区間

$$\text{誤差の範囲 } 1.96 \times 5 = 9.8$$

$$505 - 9.8 = 495.2, 505 + 9.8 = 514.8$$

仮説検定

z の値は標本平均の標準偏差をそのまま使って

$$z = \frac{505 - 500}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$|z| = 1 < 1.96$ なので棄却域に入らない（帰無仮説の値 $\mu_0 = 500$ は、上で求めた信頼区間 $[495.2, 514.8]$ の中にあることも一致する）。誤りとは言えないが、これだけで H_0 が正しいとまでは結論しない。

標本平均の標準偏差5、信頼区間 $495.2 \leq \mu \leq 514.8$ 、 $z = 1$ 、帰無仮説を棄却できない

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = a_n + (2n - 1) \cdot 3^{n-1}$ を満たす。 a_4 を求めよ。
また一般項が $a_n = 2 + (n - 2) \cdot 3^{n-1}$ と表せることを用いて a_6 を求めよ。

$$a_4 = \underline{56} \quad a_6 = \underline{974}$$

階差 $b_n = (2n - 1) \cdot 3^{n-1}$ を1歩ずつ足して a_4 まで計算する。

$$b_1 = 1 \times 1 = 1, b_2 = 3 \times 3 = 9, b_3 = 5 \times 9 = 45$$

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + 1 = 2, a_3 = 2 + 9 = 11, a_4 = 11 + 45 = 56$$

一般項 $a_n = 2 + (n - 2) \cdot 3^{n-1}$ で確かめる。 $n = 4 : 2 + 2 \times 27 = 2 + 54 = 56$
(一致)。

$$n = 6 \text{ を代入 : } a_6 = 2 + 4 \times 3^5 = 2 + 4 \times 243 = 2 + 972 = 974$$

検算（続けて計算）： $b_4 = 7 \times 27 = 189$ より $a_5 = 56 + 189 = 245$ 、 $b_5 = 9 \times 81 = 729$ より $a_6 = 245 + 729 = 974$ （一致）。

$$a_4 = 56, a_6 = 974$$

2種類の独立なゲームがある。ゲームAの獲得ポイントは期待値6・分散8、ゲームBの獲得ポイントは期待値9・分散5（AとBは互いに独立）。両方のゲームに1回ずつ挑戦したときの合計ポイントを T とするとき $E(T)$, $V(T)$ を求めよ。またゲームAだけに独立に3回挑戦したときの合計ポイントを U とするとき $E(U)$, $V(U)$ を求めよ。

$$E(T) = \underline{15} \quad V(T) = \underline{13} \quad E(U) = \underline{18} \quad V(U) = \underline{24}$$

$$T = A + B \text{ (AとBは独立)}$$

$$E(T) = E(A) + E(B) = 6 + 9 = 15$$

$$V(T) = V(A) + V(B) = 8 + 5 = 13$$

$$U = A_1 + A_2 + A_3 \text{ (3回とも同じ分布、互いに独立)}$$

$$E(U) = E(A_1) + E(A_2) + E(A_3) = 6 + 6 + 6 = 18 \text{ (}\sum c=nc\text{の発想)}$$

$$V(U) = V(A_1) + V(A_2) + V(A_3) = 8 + 8 + 8 = 24 \text{ (3回とも独立だからこそ、そのまま計算できる)}$$

$$E(T) = 15, V(T) = 13, E(U) = 18, V(U) = 24$$

確率変数 X は 1 から n までの整数値を、それぞれ確率 $\frac{1}{n}$ で等しくとる。 $\sum k$ の公式・ $\sum k^2$ の公式を用いて $E(X)$ 、 $V(X)$ を n の式で表せ。また $n = 20$ のときのそれぞれの値を求めよ。

$$E(X) (n = 20) = \underline{21/2} \quad V(X) (n = 20) = \underline{133/4}$$

期待値を $\sum k$ の公式で表す。

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$E(X^2)$ を $\sum k^2$ の公式で表す。

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

分散は定義どおり計算する。

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= (n+1) \left\{ \frac{2n+1}{6} - \frac{n+1}{4} \right\} = (n+1) \times \frac{2(2n+1) - 3(n+1)}{12} = (n+1) \times \frac{n-1}{12} = \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

$n = 20$ を代入する。

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{20+1}{2} = \frac{21}{2} = 10.5 \\ V(X) &= \frac{20^2-1}{12} = \frac{399}{12} = \frac{133}{4} = 33.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{n+1}{2}, \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12} \quad (n = 20 \text{ のとき } E(X) = \frac{21}{2} = 10.5, \\ V(X) &= \frac{133}{4} = 33.25) \end{aligned}$$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

まとめテストの間26では、確率変数 X ($1, 2, 3, 4, 5$ の値をとる) が $P(X = k) = ck$ という、確率が一樣ではない分布に従っていた。この問題で定数 c や期待値 $E(X)$ を求めるのに使った $\sum k$ の公式・ $\sum k^2$ の公式が、さいころのように確率が全部同じ場合だけでなく、確率が k に比例するような一樣でない場合にもそのまま使えるのはなぜか、問26の実際の数値を使って説明せよ。

数列の章で学ぶ $\sum k$ の公式 $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ や $\sum k^2$ の公式は、足し合わせる中身が

「 k そのもの」や「 k^2 」であることだけを使っており、 k が何を表しているかにはよらない。だから、確率 p_k が k に比例している ($p_k = ck$ のように定数 c を外にくくり出せる) 場合には、残った $\sum k$ や $\sum k^2$ の部分にそのまま数列の章の公式が使える。逆に確率がばらばらの値のときは c を外に出せないので、この手は使えず1項ずつ足すことになる。

問26で確認する。確率の総和が1になる条件は $\sum_{k=1}^5 ck = c \sum_{k=1}^5 k = 1$ であり、ここで

$\sum_{k=1}^5 k = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$ という $\sum k$ の公式をそのまま使うと $c \times 15 = 1$ より $c = \frac{1}{15}$ が求まる。さいころのように確率が $\frac{1}{6}$ で一定なら c を求める必要すらないが、確率が k に比例して変わる今回のような場合でも、 $\sum k$ の公式さえ知っていれば同じ手順で c を特定できる。

続けて期待値も $E(X) = \sum_{k=1}^5 k \times ck = c \sum_{k=1}^5 k^2$ と、 $\sum k^2$ の形に持ち込める。 $\sum k^2$ の

公式より $\sum_{k=1}^5 k^2 = \frac{1}{6} \times 5 \times 6 \times 11 = 55$ なので $E(X) = \frac{1}{15} \times 55 = \frac{11}{3}$ となる。

確率が一樣かどうかに関わらず、 k や k^2 を足し集める部分にはいつも数列の章の $\sum$ 公式がそのまま使えて、確率の重みは公式の外に定数 c としてくくり出せばよい、というのがこの融合の仕組みである。

確率が一樣でなくても、 $\sum$ の中身が k や k^2 である限り数列の章の $\sum$ 公式はそのまま使

える。問26では $\sum_{k=1}^5 k = 15$ から $c = 1/15$ を、 $\sum_{k=1}^5 k^2 = 55$ から $E(X) = 11/3$ を求められることがその証拠である。

記2 まとめテストの問34（漸化式 $a_{n+1} = 3a_n - 2$ を数学的帰納法で証明する問題）と問31（帰無仮説 $H_0: \mu = 80$ を検定する問題）は、扱う内容はまったく異なるが、論証の「型」に共通点がある。それぞれで実際に何を仮定し、何を計算し、どんな基準で結論を出しているかを、2問の実際の数値を挙げながら対比して説明せよ。

問34の数学的帰納法は、次の手順で $a_n = 3^{n-1} + 1$ という推測を証明する。(i) $n = 1$ で直接確かめる： $3^0 + 1 = 2$ は $a_1 = 2$ と一致する。(ii) $n = k$ で成り立つと**仮定**する： $a_k = 3^{k-1} + 1$ 。この仮定を漸化式に代入して計算すると $a_{k+1} = 3a_k - 2 = 3(3^{k-1} + 1) - 2 = 3^k + 1$ となり、これは推測の式で n を $k + 1$ に置き換えた式と**ぴったり一致**する。一致が確認できたので、すべての自然数 n で $a_n = 3^{n-1} + 1$ が成り立つと結論できる。

問31の仮説検定も、同じ3段階で結論を出す。(i) 帰無仮説 $H_0: \mu = 80$ を**仮定**する。(ii) この仮定のもとで z の値を計算すると $z = \frac{83 - 80}{15/\sqrt{225}} = 3$ となる。この $z = 3$ を、あらかじめ決めておいた基準 $|z| > 1.96$ と照らし合わせると、 $|z| = 3 > 1.96$ なので棄却域に入っている。「 H_0 ($\mu = 80$) が正しいなら、これほど大きい z が観測される確率はとても小さいはずなのに、実際に観測された」ので、 H_0 の仮定自体が誤りだったと判断し、 H_0 を棄却する。

2問を並べると、どちらも「仮定する（(i)を確かめる／ H_0 を立てる）→仮定のもとで実際に計算する（ $a_{k+1} = 3^k + 1$ を導く／ $z = 3$ を求める）→計算結果を基準と照らして判断する（式が一致するか／ $|z|$ が1.96を超えるか）→結論を出す」という同じ骨組みを持っている。違いは基準の厳しさにある。問34は a_{k+1} の式が $n = k + 1$ の推測式と1文字も違わず**完全に一致**するかどうかで判断するので、例外を一切許さない100%の証明になる。問31は $z = 3$ が棄却域という**確率的な境界線**（1.96）を超えたかどうかで判断するので、5%の確率で判断を誤る可能性を最初から織り込んだ判断になる。

問34は「 $a_6=244$ まで実際に計算し、 $a_{k+1}=3^k+1$ が推測式とぴったり一致する」ことで証明が完成する100%確実な論証、問31は「 $z=3$ が $|z|>1.96$ という境界を超えた」ことで帰無仮説を棄却する、5%の誤りを許容した確率的な論証である。どちらも仮定→計算→基準との照合→結論、という同じ順序で進む点が共通している。

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 12分／配点 20点

太郎さんの通う高校の吹奏楽部では、新入部員数の予測モデルを考えている。1年目の新入部員数は30人であった。先生の説明によると、ある年の新入部員数 a_n (人) から翌年の新入部員数 a_{n+1} (人) は、 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 20$ という式で予測できるといふ。この a_n は人数の目安を表す予測値であり、小数のまま扱ってよい。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「この式を漸化式とみて、特性方程式を使うと一般項が求められるよ。」

太郎「特性方程式は $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 20$ を解けばいいんですね。」

(1)

特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 20$ を解くと、 $\alpha = \boxed{\text{アイ}}$ である。これは、年数が十分に経ったときにこの新入部員数が近づいていく値を表している。

アイ 40

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 20$$

$$\frac{1}{2}\alpha = 20$$

$$\alpha = 40$$

$$\alpha = 40$$

(2)

もとの漸化式と(1)の特性方程式を辺々引くことで、一般項は $a_n = \boxed{\text{ウエ}} - \boxed{\text{オカ}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ と表せる。ウエ、オカの値を求めよ。

ウエ 40 オカ 10

もとの漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 20$ と特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 20$ ($\alpha = 40$) を辺々引くと

$$a_{n+1} - 40 = \frac{1}{2}(a_n - 40)$$

数列 $\{a_n - 40\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で、初項は $a_1 - 40 = 30 - 40 = -10$ 。よって

$$a_n - 40 = -10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n = 40 - 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

検算： $n = 1$ のとき $40 - 10 \times 1 = 30$ （条件と一致）、 $n = 2$ のとき $40 - 10 \times \frac{1}{2} = 40 - 5 = 35$ 。実際に $a_2 = \frac{1}{2} \times 30 + 20 = 15 + 20 = 35$ （一致）。

$$a_n = 40 - 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(3)

(2)の結果を用いて $n = 4$ と $n = 5$ のときの a_n をそれぞれ計算することで、新入部員数がはじめて39人を超えるのは キ 年目であることがわかる。

キ 5

(2)の $a_n = 40 - 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ に代入して比べる。

$n = 4 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ 、 $a_4 = 40 - \frac{10}{8} = 40 - 1.25 = 38.75$ （まだ39人を超えていない）

$n = 5 : \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ 、 $a_5 = 40 - \frac{10}{16} = 40 - 0.625 = 39.375$ （はじめて39人を超える）

5年目

花子さんのクラスでは、文化祭の射的コーナーの景品準備を検討している。1回の射的で的に命中する確率はおおよそ0.4と見込まれており、1人のお客さんが独立に150回挑戦できるとする。先生と花子さんは、命中回数の散らばり方から必要な景品数を考えている。

先生「150回のうち、命中した回数を X としよう。それぞれの回は独立で、命中する確率はいつも0.4とみなせるね。」

花子「じゃあ X は二項分布に従いますね。まず平均と分散を求めてみます。」

- (1) $X \sim B(150, 0.4)$ であるとして、期待値 $E(X) = \boxed{\text{アイ}}$ 、分散 $V(X) = \boxed{\text{ウエ}}$ を求めよ。

アイ 60 ウエ 36

二項分布の公式に代入する。

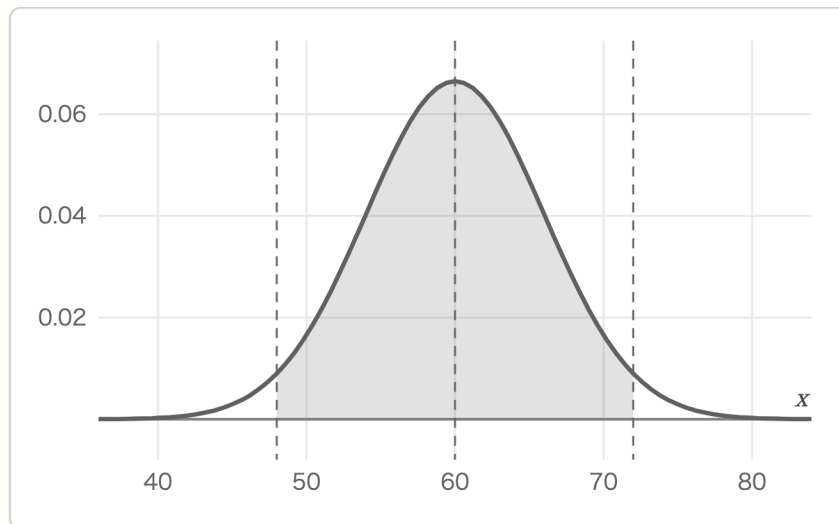
$$E(X) = np = 150 \times 0.4 = 60$$

$$V(X) = np(1 - p) = 150 \times 0.4 \times 0.6 = 36$$

$$E(X) = 60, V(X) = 36$$

- (2) 先生「 X を正規分布で近似して、命中回数が48回から72回までにおさまる確率を調べてみよう。」

(1)の結果より $\sigma = \sqrt{V(X)} = 6$ である。正規近似を用いてこの確率をパーセントで求めると $\boxed{\text{オカ.キク}}$ % である。



平均60を中心に左右対称な範囲 ($\pm 2\sigma$) なので、表の値を2倍すればよい。

オカ.キク **95.44**

$Z_1 = \frac{48 - 60}{6} = -2.0$ 、 $Z_2 = \frac{72 - 60}{6} = 2.0$ 。平均60を中心に左右対称な範囲なので

$$P(48 \leq X \leq 72) \approx 2p(2.0) = 2 \times 0.4772 = 0.9544$$

パーセントに直すと95.44%。

95.44%

(3) 先生「実際に150回試したお客さんの記録を見たら、命中回数がちょうど(1)の期待値と同じ60回だったよ。(2)で求めた95.44%は、平均 $\pm 2\sigma$ の範囲に入る確率だったね。今度は同じ考え方を $\pm 1.96\sigma$ の範囲にあてはめて、命中率の母比率 p の95%信頼区間を求めてみよう。」

標本比率 $\hat{p} = \frac{60}{150} = 0.4$ を用いると、標本比率の標準偏差は $\frac{\text{ケ}}{\text{コサ}}$ (既約分数で答えよ) であり、母比率の95%信頼区間は $0.\text{シスセソ} \leq p \leq 0.\text{タチツテ}$ である。

ケ 1 コサ 25 シスセソ 3216 タチツテ 4784

$$\text{標本比率の標準偏差 } \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{150}} = \sqrt{\frac{0.24}{150}} = \sqrt{0.0016} = 0.04 = \frac{1}{25}$$

$$\text{誤差の範囲 } 1.96 \times 0.04 = 0.0784$$

$$0.4 - 0.0784 = 0.3216, 0.4 + 0.0784 = 0.4784$$

$$\text{標本比率の標準偏差 } \frac{1}{25} (= 0.04), 0.3216 \leq p \leq 0.4784$$

大問3 目標時間 11分／配点 20点

花子さんのクラスでは、文化祭の福引きの景品構成を考えている。1等から5等まであり、 k 等のくじは k 本ずつ用意する（1等は1本、2等は2本、…、5等は5本）。 k 等が当たったときの賞金は $(6 - k) \times 100$ 円とする（1等は500円、5等は100円）。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「まずは、くじの総本数から求めてみよう。」

太郎「1等1本、2等2本、…と足していけばいいので、 Σk の公式が使えますね。」

(1) くじの総本数を、 Σk の公式を用いて求めよ。総本数は アイ 本である。

アイ 15

$$k\text{等が}k\text{本なので、総本数は } \sum_{k=1}^5 k = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15 \text{ (本)}$$

15本

(2) 花子「くじを1本引いたときの賞金を確率変数 X とすると、 k 等が当たる確率は $\frac{k}{15}$ ですね。期待値を求めるには $\sum_{k=1}^5 k(6 - k)$ の値が必要になりそうです。」

$$\sum_{k=1}^5 k(6-k) = 6 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 k^2 \text{ と変形できる。 } 6 \sum_{k=1}^5 k = \boxed{\text{ウエ}},$$

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = \boxed{\text{オカ}} \text{ より、 } \sum_{k=1}^5 k(6-k) = \boxed{\text{キク}} \text{ である。}$$

ウエ 90 オカ 55 キク 35

$$\sum_{k=1}^5 k = 15 \text{ なので } 6 \sum_{k=1}^5 k = 6 \times 15 = 90$$

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = \frac{1}{6} \times 5 \times 6 \times 11 = 55$$

$$\sum_{k=1}^5 k(6-k) = 90 - 55 = 35$$

検算（直接計算）： $k = 1 \sim 5$ で $k(6-k)$ は $5, 8, 9, 8, 5$ となり、合計 $5 + 8 + 9 + 8 + 5 = 35$ （一致）。

$$6 \sum_{k=1}^5 k = 90, \sum_{k=1}^5 k^2 = 55, \sum_{k=1}^5 k(6-k) = 35$$

(3)

(1)(2)の結果を用いて、賞金 X の期待値 $E(X)$ を円単位で求めよ（既約分数で答えよ）。 $E(X) = \frac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ 円である。

ケコサ 700 シ 3

k 等の賞金は $(6-k) \times 100$ 円、確率は $\frac{k}{15}$ なので

$$E(X) = \sum_{k=1}^5 (6-k) \times 100 \times \frac{k}{15} = \frac{100}{15} \sum_{k=1}^5 k(6-k) = \frac{100}{15} \times 35 =$$

$$\frac{3500}{15} = \frac{700}{3}$$

$$E(X) = \frac{700}{3} \text{円 (およそ233.3円)}$$

