

不定方程式

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～7）

1

ax+by=0型

$2x + 3y = 0$ を満たす整数 x, y を、 $x = \text{ア} k, y = \text{イ} k$ (k は整数) の形で表せ。ただし、アは正の数とする。

ア 3 イ -2

2 と 3 は互いに素。公式 $x = bk, y = -ak$ より $a = 2, b = 3$ を代入する。

ア = 3、イ = -2

2

ax+by=0型

$3x + 7y = 0$ を満たす整数 x, y を、 $x = \text{ア } k, y = \text{イ } k$ (k は整数) の形で表せ。ただし、アは正の数とする。

ア 7 イ -3

3 と 7 は互いに素。公式より $a = 3, b = 7$ を代入する。

ア = 7、イ = -3

3

特殊解を目で探す

$2x + 3y = 1$ について、 $0 \leq x_0 < 3$ の範囲にある特殊解 (x_0, y_0) を求めよ。($x = 0, 1, 2$ を順に代入して探すとよい)

$x_0 = \underline{2} \quad y_0 = \underline{-1}$

$x = 0 : 3y = 1$ 整数にならない。 $x = 1 : 2 + 3y = 1 \rightarrow 3y = -1$ 整数にならない。 $x = 2 : 4 + 3y = 1 \rightarrow 3y = -3 \rightarrow y = -1$ 整数になった。

$x_0 = 2, y_0 = -1$

4

特殊解を目で探す

$5x + 2y = 1$ について、 $0 \leq x_0 < 2$ の範囲にある特殊解 (x_0, y_0) を求めよ。

$x_0 = \underline{1} \quad y_0 = \underline{-2}$

$x = 0 : 2y = 1$ 整数にならない。 $x = 1 : 5 + 2y = 1 \rightarrow 2y = -4 \rightarrow y = -2$ 整数になった。

$x_0 = 1, y_0 = -2$

5

特殊解から一般解へ

$3x + 2y = 1$ の特殊解の1つは $x_0 = 1, y_0 = -1$ である ($3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1$ を確認せよ)。整数解全体を $x = 1 + \text{ア}k, y = -1 - \text{イ}k$ (k は整数) の形で表すとき、ア、イを求めよ。

ア 2 イ 3

公式 $x = x_0 + bk, y = y_0 - ak$ で $a = 3, b = 2$ を代入する。

ア = 2、イ = 3

6

特殊解から一般解へ

$2x + 5y = 3$ の特殊解の1つは $x_0 = 4, y_0 = -1$ である ($2 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) = 3$ を確認せよ)。整数解全体を $x = 4 + \text{ア}k, y = -1 - \text{イ}k$ (k は整数) の形で表すとき、ア、イを求めよ。

ア 5 イ 2

公式 $x = x_0 + bk, y = y_0 - ak$ で $a = 2, b = 5$ を代入する。

ア = 5、イ = 2

7

一般解から組数を数える

$3x + 2y = 1$ の整数解は $x = 1 + 2k, y = -1 - 3k$ (k は整数) と表される。このうち $1 \leq x \leq 19$ を満たす整数の組 (x, y) は何組あるか。

組数 10

$1 \leq 1 + 2k \leq 19$ を解く。 $0 \leq 2k \leq 18$ より $0 \leq k \leq 9$ 。
 $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ の 10 個。

10組

- 8 $5x + 3y = 2$ の整数解全体を $x = x_0 + \text{ア}k$, $y = y_0 - \text{イ}k$ (k は整数) の形で表したい。 $0 \leq x_0 < 3$ の範囲で特殊解 (x_0, y_0) を求め、続けてア、イを求めよ。

$$x_0 = \underline{1} \quad y_0 = \underline{-1} \quad \text{ア} \quad \underline{3} \quad \text{イ} \quad \underline{5}$$

$x = 0 : 3y = 2$ 不可。 $x = 1 : 5 + 3y = 2 \rightarrow 3y = -3 \rightarrow y = -1$ 。特殊解 $(1, -1)$ 。

公式 $x = x_0 + bk$, $y = y_0 - ak$ ($a = 5, b = 3$) にあてはめる。

$$x_0 = 1, y_0 = -1, \text{ア} = 3, \text{イ} = 5$$

- 9 $4x + 7y = -1$ の整数解全体を $x = x_0 + \text{ア}k$, $y = y_0 - \text{イ}k$ (k は整数) の形で表したい。 $0 \leq x_0 < 7$ の範囲で特殊解 (x_0, y_0) を求め、続けてア、イを求めよ。

$$x_0 = \underline{5} \quad y_0 = \underline{-3} \quad \text{ア} \quad \underline{7} \quad \text{イ} \quad \underline{4}$$

$x = 0, 1, 2, 3, 4$ はいずれも $7y = -1, -5, -9, -13, -17$ となり整数にならない。

$x = 5 : 20 + 7y = -1 \rightarrow 7y = -21 \rightarrow y = -3$ 。特殊解 $(5, -3)$ 。

公式 ($a = 4, b = 7$) にあてはめる。

$$x_0 = 5, y_0 = -3, \text{ア} = 7, \text{イ} = 4$$

- 10 $2x + 5y = 3$ の整数解は $x = 4 + 5k$, $y = -1 - 2k$ (k は整数) と表される。このうち $-10 \leq x \leq 30$ を満たす整数の組 (x, y) は何組あるか。

組数 8

$-10 \leq 4 + 5k \leq 30$ を解く。 $-14 \leq 5k \leq 26$ より $-2.8 \leq k \leq 5.2$ 。

整数 k は $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ の 8 個。

8組

11 $3x + 4y = 41$ を満たす正の整数の組 (x, y) は何組あるか。

組数 3

$0 \leq x_0 < 4$ で特殊解を探す。 $x = 3 : 9 + 4y = 41 \rightarrow 4y = 32 \rightarrow y = 8$ 。特殊解 $(3, 8)$ 。

一般解は $x = 3 + 4k, y = 8 - 3k$ 。

$x > 0 : 3 + 4k > 0 \rightarrow k \geq 0$ 。 $y > 0 : 8 - 3k > 0 \rightarrow k \leq 2$ 。

$k = 0, 1, 2$ の3通り : $(3, 8), (7, 5), (11, 2)$ 。

3組

12 $4x + 6y = 7$ を満たす整数 x, y は存在するか。存在すれば1、存在しなければ0を入力せよ。(ヒント : 4と6の最大公約数に注目)

答え 0

4 と 6 の最大公約数は 2。左辺 $4x + 6y$ は必ず 2 の倍数になるが、右辺の 7 は 2 の倍数ではない。

したがって、この式を満たす整数 x, y は存在しない。

0 (存在しない)

13 $5x + 7y = 3$ の整数解全体を $x = x_0 + \text{ア}k, y = y_0 - \text{イ}k$ (k は整数) の形で表したい。 $0 \leq x_0 < 7$ の範囲で特殊解 (x_0, y_0) を求め、続けてア、イを求めよ。

$x_0 =$ 2 $y_0 =$ -1 ア 7 イ 5

$x = 0 : 7y = 3$ 不可。 $x = 1 : 5 + 7y = 3 \rightarrow 7y = -2$ 不可。 $x = 2 : 10 + 7y = 3 \rightarrow 7y = -7 \rightarrow y = -1$ 。特殊解 $(2, -1)$ 。

公式 ($a = 5, b = 7$) にあてはめる。

$x_0 = 2, y_0 = -1, \text{ア} = 7, \text{イ} = 5$

挑戦 (14~16)

14

文章題：代金の組み合わせ

1本120円のボールペンと1本200円のマーカーを、あわせて何本か買って代金の合計をちょうど2000円にしたい。買い方は何通りあるか。ただし、どちらも1本以上買うものとする。

通り数 3

ボールペン x 本、マーカー y 本とすると $120x + 200y = 2000$ 。両辺を 40 で割って $3x + 5y = 50$ 。

$x = 0 : 5y = 50 \rightarrow y = 10$ 。特殊解 $(0, 10)$ 。一般解 $x = 5k, y = 10 - 3k$ 。

$x \geq 1 : 5k \geq 1 \rightarrow k \geq 1$ 。 $y \geq 1 : 10 - 3k \geq 1 \rightarrow k \leq 3$ 。

$k = 1, 2, 3$ の3通り : $(5, 7), (10, 4), (15, 1)$ 。

3通り

15

文章題：個数の組を全部求める

1個80円の消しゴムと1個50円のえんぴつを、あわせて何個か買ったところ、代金の合計がちょうど730円になった。消しゴムの個数として考えられる値をすべて、コンマ区切りで小さい順に答えよ。また、組み合わせは何通りあるか。ただし、どちらも1個以上買うものとする。

消しゴムの個数 1,6 組み合わせの数 2

消しゴム x 個、えんぴつ y 個とすると $80x + 50y = 730$ 。両辺を 10 で割って $8x + 5y = 73$ 。

$x = 1 : 8 + 5y = 73 \rightarrow 5y = 65 \rightarrow y = 13$ 。特殊解 $(1, 13)$ 。一般解 $x = 1 + 5k, y = 13 - 8k$ 。

$x \geq 1 : k \geq 0$ 。 $y \geq 1 : 13 - 8k \geq 1 \rightarrow k \leq 1.5 \rightarrow k \leq 1$ 。

$k = 0, 1$ の2通り : $(1, 13), (6, 5)$ 。消しゴムの個数は 1 と 6。

消しゴムの個数 : 1,6 組み合わせの数 : 2通り

$7x + 11y = 1$ の整数解全体を、ユークリッドの互除法を利用して $x = x_0 + \text{ア}$
 k , $y = y_0 - \text{イ} k$ (k は整数) の形で求めよ。ただし $0 \leq x_0 < 11$ とする。

$$x_0 = \underline{8} \quad y_0 = \underline{-5} \quad \text{ア} \underline{11} \quad \text{イ} \underline{7}$$

互除法： $11 = 1 \times 7 + 4$ 、 $7 = 1 \times 4 + 3$ 、 $4 = 1 \times 3 + 1$ 、 $3 = 3 \times 1 + 0$ 。最大公約数は 1。

逆にたどる： $1 = 4 - 1 \times 3$ 。 $3 = 7 - 1 \times 4$ を代入して $1 = 4 - (7 - 4) = 2 \times 4 - 7$ 。

$4 = 11 - 1 \times 7$ を代入して $1 = 2 \times (11 - 7) - 7 = 2 \times 11 - 3 \times 7$ 。

つまり $7 \times (-3) + 11 \times 2 = 1$ より $(x, y) = (-3, 2)$ が 1 つの特殊解。

$0 \leq x_0 < 11$ にするため $k = 1$ 分ずらす： $x_0 = -3 + 11 = 8$, $y_0 = 2 - 7 = -5$

(検算： $7 \times 8 + 11 \times (-5) = 56 - 55 = 1$)。

公式 ($a = 7, b = 11$) にあてはめる。

$$x_0 = 8, y_0 = -5, \text{ア} = 11, \text{イ} = 7$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。3変数への拡張、因数分解を使う不定方程式、本格的な文章題に挑戦しよう。

応1

3変数への拡張

$x + 2y + 3z = 11$ を満たす正の整数の組 (x, y, z) は何組あるか。 $(z$ の値で場合分けして、 $x + 2y =$ の形の2変数の式に帰着させるとよい)

組数 5

z を固定して $x + 2y = 11 - 3z$ の正の整数解を数える（3変数のままだと扱いにくいので、1つの文字を固定して2変数の問題に帰着させるのがコツ）。

$z = 1 : x + 2y = 8$ 。 $y = 1, 2, 3$ ($x = 6, 4, 2$) の3組。

$z = 2 : x + 2y = 5$ 。 $y = 1, 2$ ($x = 3, 1$) の2組。

$z = 3 : x + 2y = 2$ 。 $x, y \geq 1$ だと最小でも $x + 2y = 1 + 2 = 3 > 2$ となり不可能。0組。

$z \geq 4 : 11 - 3z \leq -1 < 0$ となり不可能。

合計 $3 + 2 + 0 = 5$ 組。

5組

$xy = x + y + 3$ を満たす正の整数の組 (x, y) は何組あるか。また、 $x = y$ となる組では x はいくつか。

組数 3 $x = y$ のときの x 3

$xy = x + y + 3$ を整理すると $xy - x - y = 3$ 。左辺に 1 を足すと因数分解できる形になる。

$$xy - x - y + 1 = 4 \implies (x - 1)(y - 1) = 4$$

x, y は正の整数だから $x - 1 \geq 0, y - 1 \geq 0$ 。積が 4 (正の数) になるには、両方とも正の整数でなければならない (どちらかが 0 だと積は 0 になってしまう)。

よって $x - 1, y - 1$ は積が 4 になる正の整数の組 : $(1, 4), (2, 2), (4, 1)$ 。

これより $(x, y) = (2, 5), (3, 3), (5, 2)$ の 3 組。

$x = y$ となるのは $(3, 3)$ のときで $x = 3$ 。

組数 : 3組 $x = y$ のとき $x = 3$

ある遊園地の入園料は、おとな1人1200円、こども1人700円である。ある日、おとなとこどもがあわせて何人か入園し、入園料の合計がちょうど33800円になった。おとなの人数がこどもの人数より多くなるような入園者の組み合わせのうち、おとなの人数が最も少ないものを求めよ。

おとな 20 人 こども 14 人

おとな a 人、こども b 人とする $1200a + 700b = 33800$ 。両辺を 100 で割って $12a + 7b = 338$ 。

$0 \leq a_0 < 7$ の範囲で特殊解を探す。 $a = 6 : 72 + 7b = 338 \rightarrow 7b = 266 \rightarrow b = 38$ 。特殊解 $(6, 38)$ 。

一般解は $a = 6 + 7k, b = 38 - 12k$ 。

$a > 0 : k \geq 0$ 。 $b > 0 : 38 - 12k > 0 \rightarrow k < 3.17 \rightarrow k \leq 3$ 。よって $k = 0, 1, 2, 3$ 。

$k = 0 : (a, b) = (6, 38)$ $a < b$ で条件に合わない。

$k = 1 : (13, 26)$ $a < b$ で不適。

$k = 2 : (20, 14)$ $a > b$ で条件に合う。

$k = 3 : (27, 2)$ $a > b$ で条件に合う。

条件を満たすうち a が最小なのは $k = 2$ の $(20, 14)$ 。

検算： $1200 \times 20 + 700 \times 14 = 24000 + 9800 = 33800$ 。

おとな20人、こども14人

50円切手と80円切手を組み合わせて、ちょうど990円分にしたい。買い方は何通りあるか。また、80円切手の枚数として考えられる値を、コンマ区切りで小さい順に答えよ。ただし、どちらも1枚以上使うものとする。

通り数 2 80円切手の枚数 3,8

50円切手 x 枚、80円切手 y 枚とすると $50x + 80y = 990$ 。両辺を 10 で割って $5x + 8y = 99$ 。

$0 \leq x_0 < 8$ の範囲で特殊解を探す。 $x = 7 : 35 + 8y = 99 \rightarrow 8y = 64 \rightarrow y = 8$ 。特殊解 $(7, 8)$ 。

一般解は $x = 7 + 8k, y = 8 - 5k$ 。

$x \geq 1 : k \geq 0$ 。 $y \geq 1 : 8 - 5k \geq 1 \rightarrow k \leq 1.4 \rightarrow k \leq 1$ 。
 $k = 0 : (7, 8)$ 。 $k = 1 : (15, 3)$ 。

2通りで、80円切手の枚数は 8 と 3 (小さい順に 3, 8)。

通り数 : 2通り 80円切手の枚数 : 3,8

1個150円のりんごと1個90円のみかんを、予算3000円ちょうどで買いたい。りんごの個数をできるだけ多くしたいとき、りんごとみかんはそれぞれ何個か。ただし、どちらも1個以上買うものとする。

りんご 17 個 みかん 5 個

りんご x 個、みかん y 個とすると $150x + 90y = 3000$ 。両辺を 30 で割って $5x + 3y = 100$ 。

$0 \leq x_0 < 3$ の範囲で特殊解を探す。 $x = 2 : 10 + 3y = 100 \rightarrow 3y = 90 \rightarrow y = 30$ 。特殊解 $(2, 30)$ 。

一般解は $x = 2 + 3k, y = 30 - 5k$ 。

$x \geq 1 : k \geq 0$ 。 $y \geq 1 : 30 - 5k \geq 1 \rightarrow k \leq 5.8 \rightarrow k \leq 5$ 。よって $k = 0, 1, \dots, 5$ 。

りんごの個数 $x = 2 + 3k$ を最大にするには k を最大の 5 にとればよい。

$k = 5 : x = 2 + 15 = 17, y = 30 - 25 = 5$ 。

検算 : $150 \times 17 + 90 \times 5 = 2550 + 450 = 3000$ 。

りんご17個、みかん5個