

最大公約数・最小公倍数・互除法

問題プリント（全30問）

氏名 _____

得点 _____ / 30点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～9）

1 素因数分解から

18 と 24 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 最小公倍数

2 素因数分解から

36 と 84 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 最小公倍数

3 素因数分解から

45 と 150 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 最小公倍数

4 素因数分解から

63 と 90 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 最小公倍数

5 素因数分解から（数が少し大きい）

112 と 84 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 最小公倍数

6 $a \times b = \text{gcd} \times \text{lcm}$ の関係を利用

72 と 90 の最大公約数は 18 である。このとき、最小公倍数を求めよ。

最小公倍数

7 $a \times b = \text{gcd} \times \text{lcm}$ の関係を利用

36 と 48 の最小公倍数は 144 である。このとき、最大公約数を求めよ。

最大公約数

8 合同式の定義

整数 a, b と正の整数 m について、 $a - b$ が m の倍数であるとき $a \equiv b \pmod{m}$ と表す。この定義が「 a を m で割った余りと b を m で割った余りが等しい」ことと同じ意味であることを、 $a = 23$ 、 $b = 8$ 、 $m = 5$ の場合で確かめよ。

9

合同式の性質（加法・乗法の保存）の証明

m を正の整数とする。 $a \equiv b \pmod{m}$ 、 $c \equiv d \pmod{m}$ のとき、 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ および $ac \equiv bd \pmod{m}$ が成り立つことを証明せよ。空欄を埋めて証明を完成させよ。

$a \equiv b \pmod{m}$ の定義より $a - b =$

(k は整数)。 $c \equiv d \pmod{m}$

の定義より $c - d =$ (l は整数)。
よって

$(a + c) - (b + d) =$

となり、これは m の倍数だから

$a + c \equiv b + d \pmod{m}$ 。また

$ac - bd = c(a - b) + b(c - d) =$

となり、これも m の倍数だから
 $ac \equiv bd \pmod{m}$ 。

標準 (10~18)

10

互除法：余りを追う

84 を 36 で割ると商 2、余り r_1 。次に 36 を r_1 で割ると割り切れた (余り 0)。84 と 36 の最大公約数を互除法で求めよ。

$r_1 =$ 最大公約数

11

互除法：余りを追う (3回繰り返す)

154 を 98 で割ると商 1、余り r_1 。次に 98 を r_1 で割ると商 1、余り r_2 。次に r_1 を r_2 で割ると商 1、余り 14。最後に r_2 を 14 で割ると割り切れた。154 と 98 の最大公約数を求めよ。

$r_1 =$ $r_2 =$
最大公約数

12

互除法：大きい数でも手順は同じ

1271 を 779 で割ると商 1、余り r_1 。以下同様に割り算を繰り返していくと、最終的に割り切れる。1271 と 779 の最大公約数を求めよ。

$r_1 =$ 最大公約数

13

約分 (既約分数にする)

gcd の考え方を使って、分数 $\frac{126}{210}$ を既約分数にせよ。

既約分数

14

文章題：最小公倍数の利用

2つのランプ A, B がある。A は 20 秒おきに、B は 30 秒おきに点滅する。いま同時に点滅したとすると、次に同時に点滅するのは何秒後か。

次に同時に点滅するのは 秒後

15

3つの数の最大公約数・最小公倍数

24、36、60 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 最小公倍数

16

文章題：タイルを敷き詰める

たて 168cm、よこ 120cm の長方形の床に、すき間なく同じ大きさの正方形のタイルを敷き詰めたい。タイルをできるだけ大きくするには、一辺を何cmにすればよいか。また、そのときタイルは何枚必要か。

一辺 cm タイルの枚数

枚

17

和とGCDから2数を求める

2つの正の整数 a, b の最大公約数が 6、和が 54 であるという。考えられる a, b の組をすべて求めたい。 $a = 6p$ 、 $b = 6q$ (p, q は互いに素で $p < q$) とおくと、以下の問いに答えよ。

$p + q =$ 条件を満たす組の数は

組 差が最も小さい組は $a =$

、 $b =$

18

積と最小公倍数から2数を求める

2つの正の整数 a, b の積が 720、最小公倍数が 120 であるという。考えられる a, b の組をすべて求めたい。 $ab = \gcd(a, b) \times \text{lcm}(a, b)$ の関係を使って、まず最大公約数を求め、 $a = Gp$ 、 $b = Gq$ (p, q は互いに素で $p < q$ 、 G は最大公約数) とおいて考えよ。

最大公約数 $G =$ $p \times q =$

条件を満たす組の数は

挑戦 (19~23)

19

文章題：池のまわりの木 (最大公約数)

長方形の池のまわりの遊歩道 (たて 84m、よこ 126m) に沿って木を植える。四すみには必ず木を植え、残りも等間隔になるようにしたい。間隔をできるだけ広くするには何mおきにすればよいか。また、木は全部で何本必要か。

間隔 m 木の本数 本

20

文章題：等しく配る (最大公約数)

えんぴつ 72本とノート 108冊を、余りが出ないように、できるだけ多くの子どもに同じ数ずつ配りたい。何人に配れるか。また、そのとき1人あたりのえんぴつとノートはそれぞれ何本・何冊か。

人数 人 えんぴつ
本 ノート 冊

21

互除法で大きい分数を約分する

互除法を使って 2415 と 1035 の最大公約数を求め、分数 $\frac{2415}{1035}$ を既約分数にせよ。

最大公約数 既約分数

22

一般の証明

n を自然数とすると、 n と $n + 1$ の最大公約数を、互除法の考え方 ($\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$) を使って求めよ。

$\gcd(n, n + 1) =$

23

 $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

$\sqrt{2}$ が無理数であることを、互いに素な正の整数 p, q を用いた背理法で証明せよ。

DRILL

応用問題 (プリント限定)

ここから先はPDF限定の腕試し。最大公約数・最小公倍数の考え方を、もう一段深く使ってみよう。

応1

最大公約数・最小公倍数から2数を復元

2つの自然数 a, b ($a < b$) の最大公約数が 6、最小公倍数が 180 であり、 $a + b = 102$ であるという。 a, b を求めよ。

$a =$ $b =$

応2

連続する整数は互いに素の利用

2024 と 2025 の最大公約数を、素因数分解ではなく「連続する整数は互いに素である」という性質を使って求めよ。またその理由も説明せよ。

$\gcd(2024, 2025) =$

応3

分数が整数になる条件

自然数 n について、 $\frac{n+11}{n+2}$ が整数となるような n をすべて求めよ。(コンマ区切りで入力)

$n =$

応4

文章題：3本のロープを同じ長さに切る（3つの数の最大公約数）

長さ 150cm、210cm、270cm の3本のロープを、余りが出ないようにすべて同じ長さに切り分けた。1本の長さをできるだけ長くするには何cmにすればよいか。また、ロープは全部で何本できるか。

1本の長さ cm 本数
本

応5

最大公約数と積から最小公倍数・2数の組を求める

2つの自然数 a, b の最大公約数は 15、積 $a \times b$ は 6750 であるという。 a と b の最小公倍数を求めよ。また、 $a < b$ として a, b の組をすべて求めよ。

最小公倍数

DRILL 記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

整数 a, b ($a \geq b > 0$) について、 a を b で割ったときの商を q 、余りを r ($a = bq + r$ 、 $0 \leq r < b$) とするとき、 $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ が成り立つ理由を説明せよ。

記2

互除法を用いて 1029 と 693 の最大公約数を求め、それを使って分数 $\frac{1029}{693}$ を既約分数にせよ。
