

最大公約数・最小公倍数・互除法

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

素因数分解から

18 と 24 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 6 最小公倍数 72

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \times 3^2 & 24 &= 2^3 \times 3 \\ \gcd &= 2 \times 3 = 6 & \text{lcm} &= 2^3 \times 3^2 = 72 \end{aligned}$$

最大公約数 6、最小公倍数 72

2

素因数分解から

36 と 84 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 12 最小公倍数 252

$$\begin{aligned} 36 &= 2^2 \times 3^2 & 84 &= 2^2 \times 3 \times 7 \\ \gcd &= 2^2 \times 3 = 12 & \text{lcm} &= 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252 \end{aligned}$$

最大公約数 12、最小公倍数 252

3

素因数分解から

45 と 150 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 15 最小公倍数 450

$$\begin{aligned} 45 &= 3^2 \times 5 & 150 &= 2 \times 3 \times 5^2 \\ \gcd &= 3 \times 5 = 15 & \text{lcm} &= 2 \times 3^2 \times 5^2 = 450 \end{aligned}$$

最大公約数 15、最小公倍数 450

4

素因数分解から

63 と 90 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 9 最小公倍数 630

$$\begin{aligned} 63 &= 3^2 \times 7 & 90 &= 2 \times 3^2 \times 5 \\ \gcd &= 3^2 = 9 & \text{lcm} &= 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 630 \end{aligned}$$

最大公約数 9、最小公倍数 630

5

素因数分解から（数が少し大きい）

112 と 84 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 28 最小公倍数 336

$$112 = 2^4 \times 7 \quad 84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$\gcd = 2^2 \times 7 = 28 \quad \text{lcm} = 2^4 \times 3 \times 7 = 336$$

最大公約数 28、最小公倍数 336

6

 $a \times b = \gcd \times \text{lcm}$ の関係を利用

72 と 90 の最大公約数は 18 である。このとき、最小公倍数を求めよ。

最小公倍数 360

$$\text{lcm}(72, 90) = \frac{72 \times 90}{18} = \frac{6480}{18} = 360$$

（検算：72 = 2³ × 3²、90 = 2 × 3² × 5 より gcd = 2 × 3² = 18 で一致、
lcm = 2³ × 3² × 5 = 360 で一致。）

最小公倍数 360

7

 $a \times b = \gcd \times \text{lcm}$ の関係を利用

36 と 48 の最小公倍数は 144 である。このとき、最大公約数を求めよ。

最大公約数 12

$$\gcd(36, 48) = \frac{36 \times 48}{144} = \frac{1728}{144} = 12$$

（検算：36 = 2² × 3²、48 = 2⁴ × 3 より lcm = 2⁴ × 3² = 144 で一致、gcd = 2² × 3 = 12 で一致。）

最大公約数 12

標準 (8~14)

8

互除法：余りを追う

84 を 36 で割ると商 2、余り r_1 。次に 36 を r_1 で割ると割り切れた (余り 0)。
84 と 36 の最大公約数を互除法で求めよ。

$r_1 =$ 12 最大公約数 12

$$84 = 36 \times 2 + 12 \quad (r_1 = 12)$$

$$36 = 12 \times 3 + 0 \quad \rightarrow \text{余りが 0 になった。}$$

$r_1 = 12$ 、最大公約数は 12

9

互除法：余りを追う (3回繰り返す)

154 を 98 で割ると商 1、余り r_1 。次に 98 を r_1 で割ると商 1、余り r_2 。次に r_1 を r_2 で割ると商 1、余り 14。最後に r_2 を 14 で割ると割り切れた。154 と 98 の最大公約数を求めよ。

$r_1 =$ 56 $r_2 =$ 42 最大公約数 14

$$154 = 98 \times 1 + 56 \quad (r_1 = 56)$$

$$98 = 56 \times 1 + 42 \quad (r_2 = 42)$$

$$56 = 42 \times 1 + 14$$

$$42 = 14 \times 3 + 0 \quad \rightarrow \text{余りが 0 になった。}$$

$r_1 = 56$ 、 $r_2 = 42$ 、最大公約数は 14

10

互除法：大きい数でも手順は同じ

1271 を 779 で割ると商 1、余り r_1 。以下同様に割り算を繰り返していくと、最終的に割り切れる。1271 と 779 の最大公約数を求めよ。

$r_1 =$ 492 最大公約数 41

$$1271 = 779 \times 1 + 492 \quad (r_1 = 492)$$

$$779 = 492 \times 1 + 287$$

$$492 = 287 \times 1 + 205$$

$$287 = 205 \times 1 + 82$$

$$205 = 82 \times 2 + 41$$

$$82 = 41 \times 2 + 0 \quad \rightarrow \quad \text{余りが 0 になった。}$$

(実は $1271 = 31 \times 41$ 、 $779 = 19 \times 41$ 。素因数分解では見つけにくいですが、互除法なら機械的に求まる。)

$r_1 = 492$ 、最大公約数は 41

11

約分（既約分数にする）

gcd の考え方を使って、分数 $\frac{126}{210}$ を既約分数にせよ。

既約分数 $\frac{3}{5}$

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7, \quad 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \quad \text{より} \quad \text{gcd}(126, 210) = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

。

$$\text{分子} \cdot \text{分母を } 42 \text{ で割ると } \frac{126 \div 42}{210 \div 42} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5}$$

12

文章題：最小公倍数の利用

2つのランプ A, B がある。A は 20 秒おきに、B は 30 秒おきに点滅する。いま同時に点滅したとすると、次に同時に点滅するのは何秒後か。

次に同時に点滅するのは 60 秒後

Aが点滅するのは 20 の倍数の秒、Bが点滅するのは 30 の倍数の秒。同時に点滅するのは共通の倍数、つまり最小公倍数の秒数ごと。

$$20 = 2^2 \times 5, 30 = 2 \times 3 \times 5 \text{ より } \text{lcm}(20, 30) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

60 秒後

13

3つの数の最大公約数・最小公倍数

24、36、60 の最大公約数・最小公倍数を求めよ。

最大公約数 12 最小公倍数 360

$$24 = 2^3 \times 3 \quad 36 = 2^2 \times 3^2 \quad 60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

最大公約数は3つに共通する素因数を、指数がいちばん小さいものだけ取る： $\text{gcd} = 2^2 \times 3 = 12$

最小公倍数は現れるすべての素因数を、指数がいちばん大きいものだけ取る： $\text{lcm} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$

最大公約数 12、最小公倍数 360

たて 168cm、よこ 120cm の長方形の床に、すき間なく同じ大きさの正方形のタイルを敷き詰めたい。タイルをできるだけ大きくするには、一辺を何cmにすればよいか。また、そのときタイルは何枚必要か。

一辺 24 cm タイルの枚数 35 枚

すき間なく敷き詰められる正方形の一辺の長さは、168 と 120 の両方を割り切れる数、つまり公約数でなければならない。できるだけ大きくしたいので最大公約数を使う。

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7, 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \text{ より } \gcd(168, 120) = 2^3 \times 3 = 24$$

一辺 24cm のとき、たて方向に $168 \div 24 = 7$ 枚、よこ方向に $120 \div 24 = 5$ 枚並ぶので、合計 $7 \times 5 = 35$ 枚。

一辺 24cm、タイル 35枚

挑戦 (15~18)

15

文章題：池のまわりの木（最大公約数）

長方形の池のまわりの遊歩道（たて 84m、よこ 126m）に沿って木を植える。四すみには必ず木を植え、残りも等間隔になるようにしたい。間隔をできるだけ広くとるには何mおきにすればよいか。また、木は全部で何本必要か。

間隔 42 m 木の本数 10 本

四すみに木を植えたうえで等間隔にするには、間隔は「たて」と「よこ」の両方をちょうど割り切る数でなければならない。できるだけ広い間隔にしたいので最大公約数を使う。

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7, 126 = 2 \times 3^2 \times 7 \text{ より } \gcd(84, 126) = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

周囲の長さは $2 \times (84 + 126) = 420\text{m}$ 。間隔 42m ごとに木を植えるので、本数は周囲を1周する木の数＝間隔の個数と同じ $420 \div 42 = 10$ 本（1周してもとの木に戻る）、周の長さ÷間隔がそのまま本数になる。

間隔 42m、木 10本

16

文章題：等しく配る（最大公約数）

えんぴつ 72本とノート 108冊を、余りが出ないように、できるだけ多くの子どもに同じ数ずつ配りたい。何人に配れるか。また、そのとき1人あたりのえんぴつとノートはそれぞれ何本・何冊か。

人数 36 人 えんぴつ 2 本 ノート 3 冊

余りなく同じ数ずつ配れる人数は、72 と 108 の公約数でなければならない。できるだけ多くの人に配りたいので最大公約数を使う。

$$72 = 2^3 \times 3^2, 108 = 2^2 \times 3^3 \text{ より } \gcd(72, 108) = 2^2 \times 3^2 = 36$$

36人に配るとき、えんぴつは1人あたり $72 \div 36 = 2$ 本、ノートは1人あたり $108 \div 36 = 3$ 冊。

36人、えんぴつ 2本、ノート 3冊ずつ

17

互除法で大きい分数を約分する

互除法を使って 2415 と 1035 の最大公約数を求め、分数 $\frac{2415}{1035}$ を既約分数にせよ。

最大公約数 345 既約分数 $\frac{7}{3}$

$$2415 = 1035 \times 2 + 345$$

$$1035 = 345 \times 3 + 0 \rightarrow \text{余りが } 0 \text{ になった。}$$

最大公約数は 345。分子・分母を 345 で割ると $\frac{2415 \div 345}{1035 \div 345} = \frac{7}{3}$

(検算 : $2415 = 3 \times 5 \times 7 \times 23$ 、 $1035 = 3^2 \times 5 \times 23$ より $\gcd = 3 \times 5 \times 23 = 345$ で一致。)

最大公約数 345、既約分数 $\frac{7}{3}$

18

一般の証明

n を自然数とすると、 n と $n + 1$ の最大公約数を、互除法の考え方 ($\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$) を使って求めよ。

$$\gcd(n, n + 1) = \underline{1}$$

$n + 1$ を n で割ると、商 1、余り 1 ($n + 1 = n \times 1 + 1$)。

互除法の性質 $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ より

$$\gcd(n + 1, n) = \gcd(n, 1)$$

n を 1 で割ると必ず割り切れる (余り 0) ので $\gcd(n, 1) = 1$ 。

(これはSTEP4の性質1「連続する整数は互いに素」を、互除法の立場から導いたものになっている。)

$$\gcd(n, n + 1) = 1$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。最大公約数・最小公倍数の考え方を、もう一段深く使ってみよう。

応1

最大公約数・最小公倍数から2数を復元

2つの自然数 a, b ($a < b$) の最大公約数が 6、最小公倍数が 180 であり、 $a + b = 102$ であるという。 a, b を求めよ。

$$a = \underline{12} \quad b = \underline{90}$$

$\gcd(a, b) = 6$ より $a = 6p$ 、 $b = 6q$ (p, q は互いに素、 $p < q$) とおける。
 $\text{lcm}(a, b) = 6pq = 180$ より $pq = 30$ 。

$pq = 30$ かつ $\gcd(p, q) = 1$ となる組 ($p < q$) は $(1, 30)$ 、 $(2, 15)$ 、 $(3, 10)$ 、 $(5, 6)$ の4通り。

それぞれ $a = 6p$ 、 $b = 6q$ にすると $(6, 180)$ 、 $(12, 90)$ 、 $(18, 60)$ 、 $(30, 36)$ の4通りが候補になる。

条件 $a + b = 102$ を満たすのは $(12, 90)$ ($12 + 90 = 102$) だけ。

(検算 : $12 = 2^2 \times 3$ 、 $90 = 2 \times 3^2 \times 5$ より $\gcd = 2 \times 3 = 6$ 、 $\text{lcm} = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$ 。どちらも条件と一致。)

$$a = 12, b = 90$$

応2

連続する整数は互いに素の利用

2024 と 2025 の最大公約数を、素因数分解ではなく「連続する整数は互いに素である」という性質を使って求めよ。またその理由も説明せよ。

$$\gcd(2024, 2025) = \underline{1}$$

2025 = 2024 + 1 なので、2024 と 2025 は連続する整数である。

連続する2つの整数の公約数 d は、その差 $2025 - 2024 = 1$ も割り切らなければならない。1 を割り切る自然数は 1 しかないので $d = 1$ 。

2024 や 2025 をわざわざ素因数分解しなくても ($2024 = 2^3 \times 11 \times 23$ 、 $2025 = 3^4 \times 5^2$ と、これはかなり手間がかかる)、連続する整数であることに気づくだけで最大公約数が 1 だとわかる。これが「互いに素」の考え方の強み。

$$\gcd(2024, 2025) = 1$$

応3

分数が整数になる条件

自然数 n について、 $\frac{n+11}{n+2}$ が整数となるような n をすべて求めよ。(コンマ区切りで入力)

$$n = \underline{1, 7}$$

$n + 11 = (n + 2) + 9$ と変形できるので

$$\frac{n+11}{n+2} = \frac{(n+2)+9}{n+2} = 1 + \frac{9}{n+2}$$

これが整数になるためには、 $\frac{9}{n+2}$ が整数、すなわち $n+2$ が 9 の約数でなければならない。

9 の約数は 1, 3, 9。 n は自然数なので $n+2 \geq 3$ 。この条件を満たすのは $n+2 = 3$ または $n+2 = 9$ 。

$$n+2=3 \text{ のとき } n=1 \left(\frac{12}{3} = 4 \right)$$

$$n+2=9 \text{ のとき } n=7 \left(\frac{18}{9} = 2 \right)$$

$$n = 1, 7$$

応4

文章題：3本のロープを同じ長さに切る（3つの数の最大公約数）

長さ 150cm、210cm、270cm の3本のロープを、余りが出ないようにすべて同じ長さに切り分けたい。1本の長さをできるだけ長くするには何cmにすればよいか。また、ロープは全部で何本できるか。

1本の長さ 30 cm 本数 21 本

3本すべてを余りなく同じ長さに切れる長さは、150, 210, 270 すべての公約数でなければならない。できるだけ長くしたいので3つの最大公約数を使う。

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2, 210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7, 270 = 2 \times 3^3 \times 5 \text{ より}$$

$$\gcd(150, 210, 270) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

30cmずつに切ると、本数は $150 \div 30 + 210 \div 30 + 270 \div 30 = 5 + 7 + 9 = 21$ 本。

1本 30cm、全部で 21本

応5

最大公約数と積から最小公倍数・2数の組を求める

2つの自然数 a, b の最大公約数は 15、積 $a \times b$ は 6750 であるという。 a と b の最小公倍数を求めよ。また、 $a < b$ として a, b の組をすべて求めよ。

最小公倍数 450

$$a \times b = \gcd(a, b) \times \text{lcm}(a, b) \text{ より}$$

$$\text{lcm}(a, b) = \frac{6750}{15} = 450$$

a, b の組を求めるには $a = 15p, b = 15q$ (p, q は互いに素、 $p < q$) とおく。

$$pq = \frac{\text{lcm}}{\gcd} = \frac{450}{15} = 30。$$

$pq = 30$ かつ互いに素な組 ($p < q$) は (1, 30)、(2, 15)、(3, 10)、(5, 6) の4通り。

15 倍すると $(a, b) = (15, 450)$ 、 $(30, 225)$ 、 $(45, 150)$ 、 $(75, 90)$ の4組すべてが条件を満たす（それぞれ検算すると $\gcd = 15$ 、積 = 6750 になっている）。

最小公倍数 450。組は (15, 450), (30, 225), (45, 150), (75, 90) の4通り

