

約数と倍数・素因数分解

問題プリント（全28問）

氏名 _____

得点 _____ / 28点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～8）

1 判定法：2・5

2465 は 2 の倍数か、5 の倍数か。それぞれ○か×で答えよ。

2 の倍数 5 の倍数

2 判定法：3・9

4131 について、各位の数字の和を求めよ。また、3 の倍数か、9 の倍数か、それぞれ○か×で答えよ。

数字の和 3 の倍数
9 の倍数

3 判定法：4・8

2340 は 4 の倍数か、8 の倍数か。それぞれ○か×で答えよ。

4 の倍数 8 の倍数

4 素因数分解（指数を求める）

$84 = 2^{\text{ア}} \times 3^{\text{イ}} \times 7^{\text{ウ}}$ となるように、ア・イ・ウに当てはまる指数を求めよ。

ア イ ウ

5 素因数分解（指数を求める）

$200 = 2^{\text{ア}} \times 5^{\text{イ}}$ となるように、ア・イに当てはまる指数を求めよ。

ア イ

6 約数の個数

60 の正の約数の個数を求めよ。

個数

7 約数の総和

60 の正の約数の総和を求めよ。

総和

8

余りによる分類証明

整数 n を2で割った余りで場合分けすることにより、 $3n^2 + n$ が常に偶数であることを証明する。次の空欄をうめよ。

n を2で割った余りを r とすると、 $r = 0$ または $r = 1$ であり、 $n = 2k + r$ (k は整数) とおける。

$$\begin{aligned} 3n^2 + n &= 3(2k + r)^2 + (2k + r) = \\ &= 3(4k^2 + 4kr + r^2) + 2k + r = 12k^2 + \\ &+ 12kr + 3r^2 + 2k + r = 2(6k^2 + 6kr + \\ &+ k) + (3r^2 + r) \end{aligned}$$

よって $3n^2 + n$ を2で割った余りは、 $3r^2 + r$ を2で割った余りと等しい。

$$r = 0 \text{ のとき } 3r^2 + r = \text{ア} \quad r = 1 \text{ のとき } 3r^2 + r = \text{イ}$$

ア イ

標準 (9~17)

9

平方数にする最小の数

12 に何をかければ平方数になるか、最小の自然数を求めよ。

最小の数

10

$3600 = 2^{\text{ア}} \times 3^{\text{イ}} \times 5^{\text{ウ}}$ となるように、ア・イ・ウに当てはまる指数を求めよ。

ア イ ウ

11

$2025 = 3^{\text{ア}} \times 5^{\text{イ}}$ となるように、ア・イに当てはまる指数を求めよ。

ア イ

12

288 の正の約数の個数を求めよ。

個数

13

252 の正の約数の総和を求めよ。

総和

14

平方数にする最小の数

288 に何をかければ平方数になるか、最小の自然数を求めよ。

最小の数

15

判定法：複数まとめて

7128 は 2, 3, 4, 8, 9 のうちどの数の倍数か。あてはまるものをすべて、小さい順にコンマ区切りで答えよ。

倍数

16

 n^2 を3で割った余り

整数 n を3で割った余りで場合分けすることにより、 n^2 を3で割った余りが必ず0か1になり、2にはならないことを証明する。次の空欄をうめよ。

n を3で割った余りを r とすると、 $r = 0, 1, 2$ のいずれかであり、 $n = 3k + r$ (k は整数) とおける。

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k + r)^2 = 9k^2 + 6kr + r^2 = \\ &= 3(3k^2 + 2kr) + r^2 \end{aligned}$$

よって n^2 を3で割った余りは、 r^2 を3で割った余りに等しい。

$r = 0$ のとき $r^2 = 0$ 、3で割った余りは ア
 $r = 1$ のとき $r^2 = 1$ 、3で割った余りは イ
 $r = 2$ のとき $r^2 = 4$ 、3で割った余りは ウ

ア イ ウ

17

 n^2 を4で割った余り

整数 n の偶奇 (2で割った余り) で場合分けすることにより、 n^2 を4で割った余りが必ず0か1になることを証明する。次の空欄をうめよ。

n が偶数のとき、 $n = 2k$ (k は整数) とおけて、 $n^2 = 4k^2$ となるから、 n^2 を4で割った余りは ア。

n が奇数のとき、 $n = 2k + 1$ (k は整数) とおけて、 $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ となるから、 n^2 を4で割った余りは イ。

ア イ

挑戦 (18~21)

18 平方数にする最小の数

675 に何をかければ平方数になるか、最小の自然数を求めよ。

最小の数

19 約数の個数からNを逆算

正の約数の個数がちょうど 15 個であるような自然数のうち、最小のものを求めよ。

最小の自然数

20 総和の公式を偶奇に分けて使う

36 の正の約数の総和を求めよ。また、その中で奇数である約数だけの総和を求めよ。

総和 奇数の約数の総和

21 判定法の組み合わせ

4 の倍数でも 9 の倍数でもあるが、8 の倍数ではない3桁の自然数のうち、最小のものを求めよ。

最小の3桁の自然数

DRILL

応用問題 (プリント限定)

ここから先はPDF限定の腕試し。素因数分解の考え方を、階乗や連続する整数の性質にまで広げて使ってみよう。

応1 約数の個数から元の数を求める

ある自然数 N は素因数として 2 と 3 のみを持つ (すなわち $N = 2^a \times 3^b$, a, b は1以上の整数)。 N の正の約数の個数がちょうど 12 個であるとき、 N として考えられる値のうち最小のものを求めよ。

最小のN

応2 $n!$ に含まれる素因数の個数 (ルジャンドルの定理)

100! (1から100までの整数をすべてかけた数) を素因数分解したとき、2の指数と5の指数をそれぞれ求めよ。また、100!を10進法で書いたときに末尾に並ぶ0の個数を求めよ。

2 の指数 5 の指数
末尾の 0 の個数

応3 連続する整数の積の性質 (証明)

n を自然数とすると、連続する2つの整数の積 $n(n+1)$ は必ず 2 の倍数であることを示せ。また、連続する3つの整数の積 $n(n+1)(n+2)$ は必ず 6 の倍数であることを示せ。

応4 連続する整数の積の性質 (数値)

連続する4つの整数の積は、必ず $4! = 24$ の倍数になることが知られている。この事実を使って、 $20 \times 21 \times 22 \times 23$ を 24 で割った商を求めよ。

商

応5 $n!$ に含まれる素因数の個数 (ルジャンドルの定理)

200!を10進法で書いたときに末尾に並ぶ0の個数を求めよ。

末尾の 0 の個数

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 $N = p^a \times q^b$ (p, q は異なる素数) と素因数分解できるとき、正の約数の個数の公式 $(a + 1)(b + 1)$ が成り立つ理由を、約数の形とその数え方に触れて説明せよ。

記2 250 の正の約数の個数と総和を求めよ。また、250 は平方数か。平方数でなければ、何を掛ければ平方数になるか、最小の自然数を求めよ。
