

約数と倍数・素因数分解

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

判定法：2・5

2465 は 2 の倍数か、5 の倍数か。それぞれ○か×で答えよ。

2 の倍数 × 5 の倍数 ○

一の位は 5。偶数ではないので 2 の倍数ではない。0 でも 5 でもある「5」なので 5 の倍数。

2 の倍数：× 5 の倍数：○

2

判定法：3・9

4131 について、各位の数字の和を求めよ。また、3 の倍数か、9 の倍数か、それぞれ○か×で答えよ。

数字の和 9 3 の倍数 ○ 9 の倍数 ○

各位の数字の和は $4 + 1 + 3 + 1 = 9$ 。

9 は 9 の倍数なので、4131 は 9 の倍数。9 の倍数なら自動的に3の倍数でもある。

数字の和 9、3の倍数：○、9の倍数：○

3

判定法：4・8

2340 は 4 の倍数か、8 の倍数か。それぞれ○か×で答えよ。

4 の倍数 ○ 8 の倍数 ×

下2桁は 40。 $40 = 4 \times 10$ なので 4 の倍数。

下3桁は 340。 $340 \div 8 = 42.5$ で割り切れないので 8 の倍数ではない。

4の倍数：○、8の倍数：×

4

素因数分解（指数を求める）

$84 = 2^{\text{ア}} \times 3^{\text{イ}} \times 7^{\text{ウ}}$ となるように、ア・イ・ウに当てはまる指数を求めよ。

ア 2 イ 1 ウ 1

$84 \div 2 = 42$ 、 $42 \div 2 = 21$ （ここで2割り終了、21は奇数）

$21 \div 3 = 7$ （7は素数なので終了）

$84 = 2^2 \times 3^1 \times 7^1$ （ア= 2、イ= 1、ウ= 1）

5

素因数分解（指数を求める）

$200 = 2^{\text{ア}} \times 5^{\text{イ}}$ となるように、ア・イに当てはまる指数を求めよ。

ア 3 イ 2

$200 \div 2 = 100$ 、 $100 \div 2 = 50$ 、 $50 \div 2 = 25$ （ここで2割り終了、25は奇数）
 $25 \div 5 = 5$ 、 $5 \div 5 = 1$

$200 = 2^3 \times 5^2$ (ア = 3、イ = 2)

6

約数の個数

60 の正の約数の個数を求めよ。

個数 12

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

約数の個数は $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 3 \times 2 \times 2 = 12$

約数の個数は 12個

7

約数の総和

60 の正の約数の総和を求めよ。

総和 168

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

約数の総和は $(1 + 2 + 4)(1 + 3)(1 + 5) = 7 \times 4 \times 6 = 168$

約数の総和は 168

8

平方数にする最小の数

12 に何をかければ平方数になるか、最小の自然数を求めよ。

最小の数 3

$12 = 2^2 \times 3$ 。2の指数は偶数だが、3の指数1は奇数。

3をもう1個かければ $2^2 \times 3^2 = 36 = 6^2$ になる。

最小の数は 3 ($12 \times 3 = 36 = 6^2$)

9 $3600 = 2^{\text{ア}} \times 3^{\text{イ}} \times 5^{\text{ウ}}$ となるように、ア・イ・ウに当てはまる指数を求めよ。

ア 4 イ 2 ウ 2

$$3600 = 36 \times 100 = (2^2 \times 3^2) \times (2^2 \times 5^2) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$

ア= 4、イ= 2、ウ= 2

10 $2025 = 3^{\text{ア}} \times 5^{\text{イ}}$ となるように、ア・イに当てはまる指数を求めよ。

ア 4 イ 2

$$2025 = 81 \times 25 = 3^4 \times 5^2$$

ア= 4、イ= 2

11 288 の正の約数の個数を求めよ。

個数 18

$$288 = 2^5 \times 3^2$$

$$\text{約数の個数は } (5 + 1)(2 + 1) = 6 \times 3 = 18$$

約数の個数は 18個

12 252 の正の約数の総和を求めよ。

総和 728

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

$$\text{約数の総和は } (1 + 2 + 4)(1 + 3 + 9)(1 + 7) = 7 \times 13 \times 8 = 728$$

約数の総和は 728

13 平方数にする最小の数

288 に何をかければ平方数になるか、最小の自然数を求めよ。

最小の数 2

$288 = 2^5 \times 3^2$ 。3の指数は偶数だが、2の指数5は奇数。

2をもう1個かければ $2^6 \times 3^2 = (2^3 \times 3)^2 = 24^2 = 576$ になる。

最小の数は 2 ($288 \times 2 = 576 = 24^2$)

14

判定法：複数まとめて

7128 は 2, 3, 4, 8, 9 のうちどの数の倍数か。あてはまるものをすべて、小さい順にコンマ区切りで答えよ。

倍数 2,3,4,8,9

一の位は8（偶数）→ 2の倍数。

下2桁 $28 = 4 \times 7 \rightarrow 4$ の倍数。

下3桁 $128 = 8 \times 16 \rightarrow 8$ の倍数。

各位の和 $7 + 1 + 2 + 8 = 18 = 9 \times 2 \rightarrow 9$ の倍数（よって3の倍数でもある）。

7128は2, 3, 4, 8, 9すべての倍数

挑戦（15～18）

15

平方数にする最小の数

675 に何をかければ平方数になるか、最小の自然数を求めよ。

最小の数 3

$675 = 3^3 \times 5^2$ 。5の指数は偶数だが、3の指数3は奇数。

3をもう1個かければ $3^4 \times 5^2 = (3^2 \times 5)^2 = 45^2 = 2025$ になる。

最小の数は 3 ($675 \times 3 = 2025 = 45^2$)

正の約数の個数がちょうど 15 個であるような自然数のうち、最小のものを求めよ。

最小の自然数 144

約数の個数の公式から、 $15 = (a+1)(b+1)\cdots$ となる分解を考える。

$15 = 3 \times 5$ と分解すると、指数の組は $(a, b) = (2, 4)$ または $(4, 2)$ 。

Nを最小にするには、指数が大きいほうを小さい素数に割り当てる： $2^4 \times 3^2 = 16 \times 9 = 144$ (逆に $2^2 \times 3^4 = 4 \times 81 = 324$ より小さい)。

$15 = 15 \times 1$ (1個の素因数だけ) なら $2^{14} = 16384$ となり、はるかに大きい。

最小の自然数は 144 ($144 = 2^4 \times 3^2$ 、約数の個数 $(4+1)(2+1) = 15$)

36 の正の約数の総和を求めよ。また、その中で奇数である約数だけの総和を求めよ。

総和 91 奇数の約数の総和 13

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$\text{約数の総和は } (1 + 2 + 4)(1 + 3 + 9) = 7 \times 13 = 91$$

奇数の約数だけを集めるということは、「2を1個も使わない」約数だけを集めるということ。これは 2側の項を1 ($=2^0$) だけに固定した場合にあたるので、 $(1)(1 + 3 + 9) = 13$ 。

総和は 91、奇数の約数だけの総和は 13 (実際の奇数の約数は1, 3, 9)

4 の倍数でも 9 の倍数でもあるが、8 の倍数ではない3桁の自然数のうち、最小のものを求めよ。

最小の3桁の自然数 **108**

4の倍数かつ9の倍数ということは、4と9の最小公倍数である36の倍数ということ。

3桁で最小の36の倍数は $36 \times 3 = 108$ 。

108の下3桁（=108自身）を8で割ると $108 \div 8 = 13.5$ で割り切れないので、8の倍数ではない。条件をすべて満たす。

最小の3桁の自然数は 108

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。素因数分解の考え方を、階乗や連続する整数の性質にまで広げて使ってみよう。

応1

約数の個数から元の数を求める

ある自然数 N は素因数として 2 と 3 のみを持つ（すなわち $N = 2^a \times 3^b$ 、 a, b は1以上の整数）。 N の正の約数の個数がちょうど 12 個であるとき、 N として考えられる値のうち最小のものを求めよ。

最小のN 72

約数の個数の公式より $12 = (a+1)(b+1)$ 。 $a, b \geq 1$ なので $a+1 \geq 2, b+1 \geq 2$ 。

12 をこの条件で2数に分解すると $(a+1, b+1)$ は $(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$ のいずれか。

それぞれの $N = 2^a \times 3^b$ を計算する。

$$(a, b) = (1, 5) : N = 2 \times 243 = 486$$

$$(a, b) = (2, 3) : N = 4 \times 27 = 108$$

$$(a, b) = (3, 2) : N = 8 \times 9 = 72$$

$$(a, b) = (5, 1) : N = 32 \times 3 = 96$$

この4つのうち最小は 72 。

最小の N は72 ($72 = 2^3 \times 3^2$ 、約数の個数 $(3+1)(2+1) = 12$)

100!（1から100までの整数をすべてかけた数）を素因数分解したとき、2の指数と5の指数をそれぞれ求めよ。また、100!を10進法で書いたときに末尾に並ぶ0の個数を求めよ。

2 の指数 97 5 の指数 24 末尾の 0 の個数 24

$100! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 100$ の中に、素因数 p が何個含まれるかを数えるには、 p の倍数・ p^2 の倍数・ p^3 の倍数…がそれぞれ何個あるかを足し合わせればよい（ルジャンドルの定理）。

これは、 p の倍数は「指数1個分」、 p^2 の倍数はさらに「指数もう1個分」…と数え直すことで、二重・三重に含まれる分も正しく数えられるから。

5の指数：100以下の5の倍数は $\lfloor 100/5 \rfloor = 20$ 個、25の倍数は $\lfloor 100/25 \rfloor = 4$ 個、125の倍数は100以下に存在しない（ $\lfloor 100/125 \rfloor = 0$ ）。
合計 $20 + 4 + 0 = 24$ 。

2の指数：同様に $\lfloor 100/2 \rfloor + \lfloor 100/4 \rfloor + \lfloor 100/8 \rfloor + \lfloor 100/16 \rfloor + \lfloor 100/32 \rfloor + \lfloor 100/64 \rfloor$
 $= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ 。

末尾に並ぶ0の個数は、 $100! = 2^{97} \times 5^{24} \times (\text{他の素因数})$ の中から $2 \times 5 = 10$ を何組作れるかで決まる。2は97個、5は24個しかないので、作れる10の個数は少ないほうの 24個。

2の指数97、5の指数24、末尾の0は24個

応3

連続する整数の積の性質（証明）

n を自然数とすると、連続する2つの整数の積 $n(n+1)$ は必ず 2 の倍数であることを示せ。また、連続する3つの整数の積 $n(n+1)(n+2)$ は必ず 6 の倍数であることを示せ。

$n(n+1)$ について：

n が偶数ならば、 n 自身が2の倍数なので、積 $n(n+1)$ 全体も2の倍数。

n が奇数ならば、 $n+1$ は偶数（2の倍数）なので、やはり積全体が2の倍数。

どちらの場合でも $n(n+1)$ は 2 の倍数である。

$n(n+1)(n+2)$ について：

連続する2つの整数の中には必ず偶数が1つ以上含まれる（上の議論と同じ理由）ので、 $n(n+1)(n+2)$ は2の倍数。

また、連続する3つの整数を3で割った余りは、0, 1, 2のいずれかの並びを取り、3つ並べれば必ず余り0（=3の倍数）のものが1つ含まれる（余りが3通りしかなく、連続3個ならどこかで一巡するため）。よって $n(n+1)(n+2)$ は3の倍数でもある。

2の倍数であり、かつ3の倍数でもある整数は、2と3が互いに素なので $2 \times 3 = 6$ の倍数である。

$n(n+1)$ は必ず2の倍数、 $n(n+1)(n+2)$ は必ず6の倍数

応4

連続する整数の積の性質（数値）

連続する4つの整数の積は、必ず $4! = 24$ の倍数になることが知られている。この事実を使って、 $20 \times 21 \times 22 \times 23$ を 24 で割った商を求めよ。

商 8855

20, 21, 22, 23は連続する4つの整数なので、その積は24の倍数になることが保証されている（割り切れずに余りが出ることはない）。

実際に積を計算すると

$$20 \times 21 = 420, 420 \times 22 = 9240, 9240 \times 23 = 212520.$$

これを24で割ると $212520 \div 24 = 8855$ 。

商は8855 ($20 \times 21 \times 22 \times 23 = 212520 = 24 \times 8855$)

200!を10進法で書いたときに末尾に並ぶ0の個数を求めよ。

末尾の 0 の個数 49

末尾の0の個数は、200!の中に 2×5 の組がいくつ作れるかで決まる。2の倍数は5の倍数よりずっと多いので、決め手になるのは5の指数のほう（応2と同じ考え方）。

200以下の5の倍数： $\lfloor 200/5 \rfloor = 40$ 個

200以下の25の倍数： $\lfloor 200/25 \rfloor = 8$ 個

200以下の125の倍数： $\lfloor 200/125 \rfloor = 1$ 個

200以下の625の倍数：0個（ $625 > 200$ ）

合計 $40 + 8 + 1 + 0 = 49$ 。2の指数はこれよりはるかに大きいので、末尾の0の個数は5の指数と同じ49個。

末尾の0は49個