

作図と空間図形

解答（全20問）

氏名 _____

得点 _____ / 20点

DRILL

練習問題（全15問）

基本（1～6）

1

作図手順（垂直二等分線）

線分ABの垂直二等分線を、定規とコンパスだけで作図する手順を説明せよ。

手順1 点Aを中心として、線分ABの半分より長い半径の円をかく。同じ半径のまま、点Bを中心とする円もかく。

手順2 2つの円が交わる2点をP、Qとする。

手順3 直線PQを引く。

直線PQが線分ABの垂直二等分線になる（PQ上のどの点もA、Bから等距離だから）

2

作図手順（角の二等分線）

角AOBの二等分線を、定規とコンパスだけで作図する手順を説明せよ。

手順1 頂点Oを中心として適当な半径の円をかき、辺OA、辺OBとの交点をD、Eとする。

手順2 D、Eのそれぞれを中心として、同じ半径（DEの半分より長い半径）の円をか

く。

手順3 2つの円の交点のうち頂点Oでない方をFとし、半直線OFを引く。

半直線OFが角AOBの二等分線になる

3

作図手順（垂線）

直線 l の外にある点Pから、 l への垂線を、定規とコンパスだけで作図する手順を説明せよ。

手順1 点Pを中心として、直線 l と2点で交わるように円をか

く。交点をA、Bとする。

手順2 A、Bのそれぞれを中心として、同じ半径（直線をはさんでPの反対側にも交点ができる半径）の円をか

く。

手順3 2つの円の交点のうちPでない方をQとし、直線PQを引く。

直線PQが点Pから直線 l への垂線になる

4

オイラーの多面体定理

正八面体は頂点の数 $V = 6$ 、面の数 $F = 8$ である。オイラーの多面体定理を使って、辺の数 E を求めよ。

$$E = \underline{12}$$

$$V - E + F = 2 \text{ より } 6 - E + 8 = 2$$

$$14 - E = 2$$

$$E = 12$$

5

オイラーの多面体定理

正十二面体は頂点の数 $V = 20$ 、面の数 $F = 12$ である。オイラーの多面体定理を使って、辺の数 E を求めよ。

$$E = \underline{30}$$

$$V - E + F = 2 \text{ より } 20 - E + 12 = 2$$

$$32 - E = 2$$

$$E = 30$$

6

正多面体の性質

面の形が正五角形である正多面体の名前を答えよ。

名前 正十二面体

正多面体は5種類（正四面体・正六面体・正八面体・正十二面体・正二十面体）。面の形が正五角形なのはそのうち1つだけ。

正十二面体

標準（7～12）

7

正四面体の面の数を答えよ。

面の数 4

正四面体は正三角形4枚でできている立体。

4

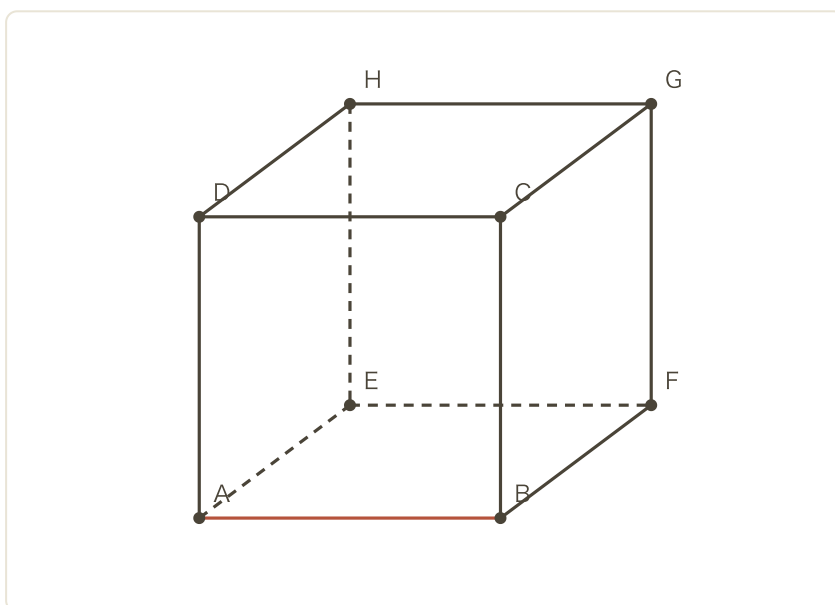
- 8 正二十面体の1つの頂点に集まる面の数を答えよ。

面の数 5

正二十面体は正三角形20枚でできており、1つの頂点には5枚の正三角形が集まる（ $5 \times 60^\circ = 300^\circ < 360^\circ$ ）。

5

- 9 立方体ABCD-EFGH（前面ABCD、後面EFGH、AE・BF・CG・DHが奥行きの辺）において、辺ABとねじれの位置にある辺は何本あるか。



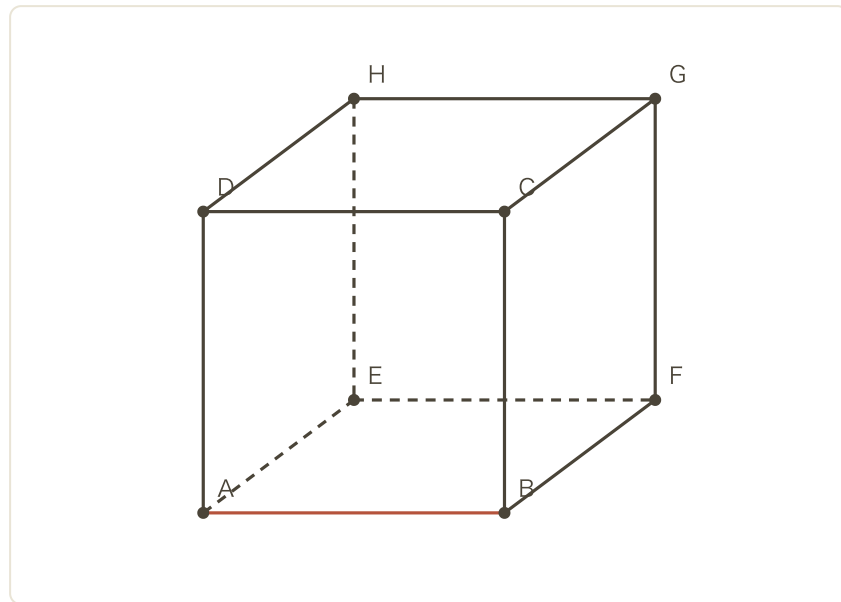
本数 4

辺ABを除く11本のうち、平行な辺はDC・EF・HG（3本）、頂点を共有して交わる辺はAD・AE・BC・BF（4本）。

残りは $11 - 3 - 4 = 4$ 本、つまりFG・HE・CG・DHの4本がねじれの位置。

4本

- 10 同じ立方体ABCD-EFGHにおいて、辺ABと平行な辺（辺AB自身は除く）は何本あるか。

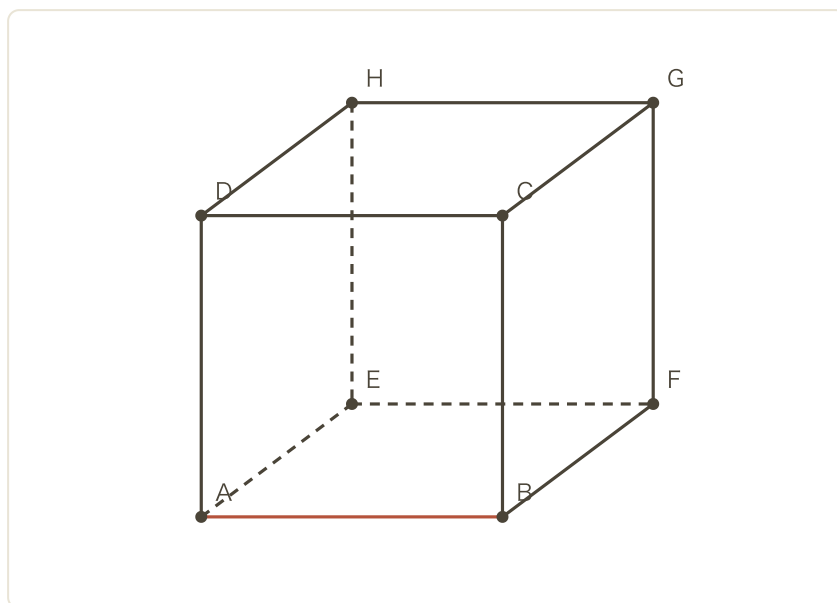


本数 3

立方体の辺は3方向に4本ずつのグループに分かれる。ABと同じ向き（横方向）の辺は、DC・EF・HGの3本。

3本

- 11 同じ立方体ABCD-EFGHにおいて、辺ABと交わる（頂点を共有する）辺は何本あるか。



本数 4

頂点Aから出る辺はAB以外にAD・AEの2本。頂点Bから出る辺はAB以外にBC・BFの2本。あわせて $2 + 2 = 4$ 本。

（確認：平行3本＋交わる4本＋ねじれ4本＝11本＝辺AB以外の全部）

4本

- 12 空間内の2直線が、同じ平面上になく、平行でも交わってもいないとき、この位置関係を何というか。

名称 ねじれの位置

平面図形の2直線は「平行」か「交わる」の2通りしかないが、空間ではこの2通りに当てはまらない位置関係が存在する。

ねじれの位置

挑戦 (13~15)

13

正多面体が5種類しかない理由

正三角形（1つの内角は 60° ）を1つの頂点に最大何枚まで集めると、正多面体を作ることができるか。

最大 5 枚

1つの頂点に集まる面の内角の和は 360° 未満でなければならない。

$60^\circ \times 3 = 180^\circ$ 、 $60^\circ \times 4 = 240^\circ$ 、 $60^\circ \times 5 = 300^\circ$ （いずれも 360° 未満でOK）、 $60^\circ \times 6 = 360^\circ$ （平らになってしまい不可）。

5枚（このとき正二十面体になる）

14

記述

正方形の面を持つ正多面体が正六面体（立方体）しかないのはなぜか。1つの頂点に集まる面の内角の和という観点から説明せよ。

正方形の1つの内角は 90° 。正多面体になるには、1つの頂点に集まる面の内角の和が 360° 未満でなければならない。

$90^\circ \times 3 = 270^\circ$ （ 360° 未満なのでOK）、 $90^\circ \times 4 = 360^\circ$ （ちょうど平らになってしまい、立体の頂点ができないので不可）。

5枚以上はさらに和が大きくなるのもっと不可。

正方形は1つの頂点に3枚しか集められず、その組み合わせでできる正多面体は正六面体（立方体）だけだから

三角錐PABCにおいて、頂点Pから底面ABCに垂線を下ろし、その足をOとする（ $PO \perp$ 平面ABC）。次に、Oから辺BCを含む直線に垂線を下ろし、その足をHとする（ $OH \perp BC$ ）。このとき $PH \perp BC$ となることを、三垂線の定理を用いて説明せよ。

$PO \perp$ 平面ABCなので、平面ABCに含まれる辺BCについても $PO \perp BC$ が成り立つ。

また仮定より $OH \perp BC$ 。

辺BCは、平面POH上の2直線PO、OHの両方に垂直なので、辺BCは平面POHそのものに垂直である。

平面POH上のどの直線とも垂直になるはずなので、平面POH上にある直線PHとも垂直になる。

よって $PH \perp BC$ （三垂線の定理そのものの証明の考え方と同じ）

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。多面体の切断・隣接面・サッカーボール型の多面体など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

立方体の切断

1辺の長さが6の立方体がある。1つの頂点に集まる3本の辺の先（つまりその頂点に隣り合う3つの頂点）を通る平面で、立方体の角を切り落とす。切り口にできる三角形の1辺の長さを求めよ。

1辺の長さ $6\sqrt{2}$

切り落とす頂点をOとし、Oに隣り合う3つの頂点をP、Q、Rとする。OP、OQ、ORはすべて立方体の辺なので長さ6、かつ互いに垂直。

三角形OPQは直角三角形（ $\angle POQ = 90^\circ$ ）なので、三平方の定理より

$$PQ = \sqrt{OP^2 + OQ^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

QR、RPも同様の理由で同じ長さになるので、切り口PQRは正三角形。

（一般に1辺の長さがaの立方体なら、切り口の正三角形の1辺は $a\sqrt{2}$ になる）

切り口の正三角形の1辺の長さは $6\sqrt{2}$

正二十面体（頂点12・辺30・面20の正三角形、1つの頂点に正三角形が5枚集まる）の12個の頂点をすべて切り落とすと、サッカーボールの模様として知られる「切頂二十面体」ができる。次の問いに答えよ。(1) 切り落とされた1つの頂点には、もとの正二十面体で正三角形が5枚集まっていた。この切り口にできる新しい面は何角形か。また、その面はいくつできるか。(2) もとの20枚の正三角形の面は、頂点を切り落とすことで何角形に変わるか。(3) (1)(2)から、切頂二十面体の面の総数 F を求めよ。(4) 切頂二十面体の頂点の数は $V=60$ 、辺の数は $E=90$ であることが知られている。オイラーの多面体定理から求めた F の値が、(3)の答えと一致することを確認せよ。

(1) 形 正五角形 個数 12 (2) 形 六角形 (3) $F =$ 32

(4) オイラーの定理から求めた F 32

(1) 1つの頂点に正三角形が5枚集まっていたので、その頂点を切り落とすと、5枚の正三角形の辺に沿った切り口は正五角形になる。もとの頂点は12個あるので、正五角形の面は12個できる。

(2) もとの正三角形の3つの角がそれぞれ切り落とされるので、三角形は六角形（実は正六角形）に変わる。もとの面は20枚なので、六角形の面が20個できる。

$$(3) F = 12 + 20 = 32$$

(4) オイラーの多面体定理 $V - E + F = 2$ より

$$F = 2 - V + E = 2 - 60 + 90 = 32$$

これは(3)で求めた値と一致する。

切頂二十面体は正五角形12枚と正六角形20枚、合わせて32枚の面でできている（ $V = 60, E = 90, F = 32$ で $V - E + F = 2$ も成立）

応3

隣接する面の数

正十二面体の1つの面（正五角形）に隣接する（辺を共有する）面はいくつあるか。また、正二十面体の1つの面（正三角形）に隣接する面はいくつあるか。

正十二面体 5 正二十面体 3

凸多面体では、1つの辺は必ずちょうど2つの面の境界になっている。つまり、1つの面に隣接する面の数は、その面の辺の数と同じになる。

正十二面体の面は正五角形（辺は5本）なので、隣接する面は5個。

正二十面体の面は正三角形（辺は3本）なので、隣接する面は3個。

正十二面体は5個、正二十面体は3個

応4

正八面体のねじれの位置

正八面体は、6個の頂点A、A'、B、B'、C、C'（AA'、BB'、CC'がそれぞれ向かい合う頂点の組）を持ち、向かい合う頂点の組以外のすべての2頂点を結ぶと12本の辺ができる。辺ABに対して、ねじれの位置にある辺は何本あるか。

本数 4

辺は全部で12本あるので、辺AB以外は11本。

頂点A、Bのどちらかを共有する辺（交わる辺）：Aから出る辺はAB以外にAB'、AC、AC'の3本。Bから出る辺はAB以外にA'B、BC、BC'の3本。あわせて6本。

平行な辺：向かい合う頂点の組を使ったA'B'が、ABとちょうど平行になる（1本）。

残りは $11 - 6 - 1 = 4$ 本。これがねじれの位置にある辺の本数。

4本

正四面体ABCDにおいて、辺ABとねじれの位置にある辺をすべて答えよ。また、その本数を求めよ。

辺 CD 本数 1

正四面体の辺は全部で6本（AB、AC、AD、BC、BD、CD）。辺AB以外の5本のうち、頂点A・Bのどちらかを共有する辺はAC、AD、BC、BDの4本（残り全部）。共有しない辺はCDの1本だけで、これがねじれの位置にある辺。

正四面体では、向かい合う辺（対辺）の組は必ずねじれの位置にあり、しかも垂直に交わる（座標を使って調べると確かめられる、発展的な事実）。

辺CDの1本だけがねじれの位置