

円の性質（円周角・接弦定理・方べき）

解答（全23問）

氏名 _____

得点 /23点

DRILL

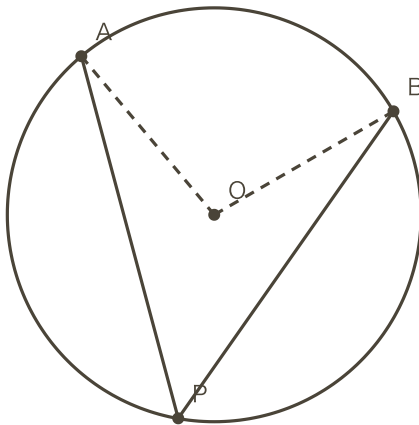
練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

中心角→円周角

円Oにおいて、弧ABに対する中心角が 100° であるとき、弧ABに対する円周角 $\angle APB$ を求めよ。



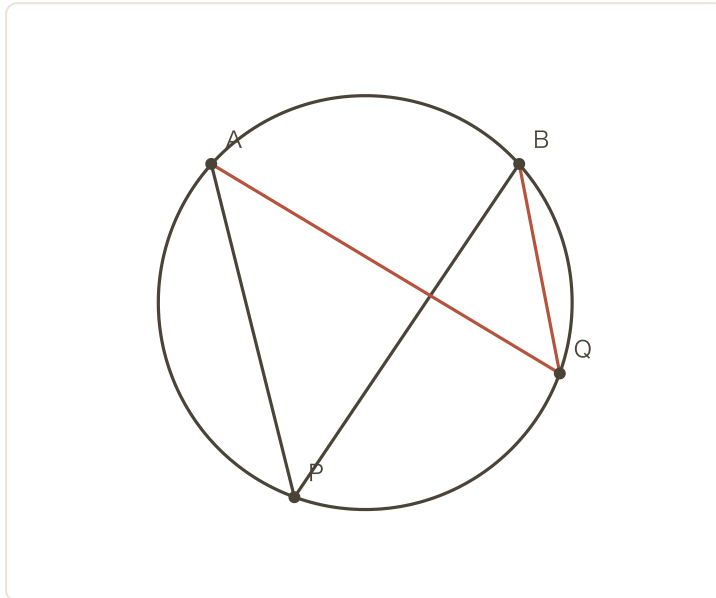
$\angle APB =$ 50 度

円周角は中心角の半分。

$$\angle APB = 100^\circ \div 2 = 50^\circ$$

$$\angle APB = 50^\circ$$

円周上の点Pから弦ABを見た角 $\angle APB = 48^\circ$ である。PとQはどちらも弧AB（Pを含まない方の弧を除いた、同じ側の弧）上の点であるとき、同じ弦ABを見た角 $\angle AQB$ を求めよ。



$\angle AQB =$ 48 度

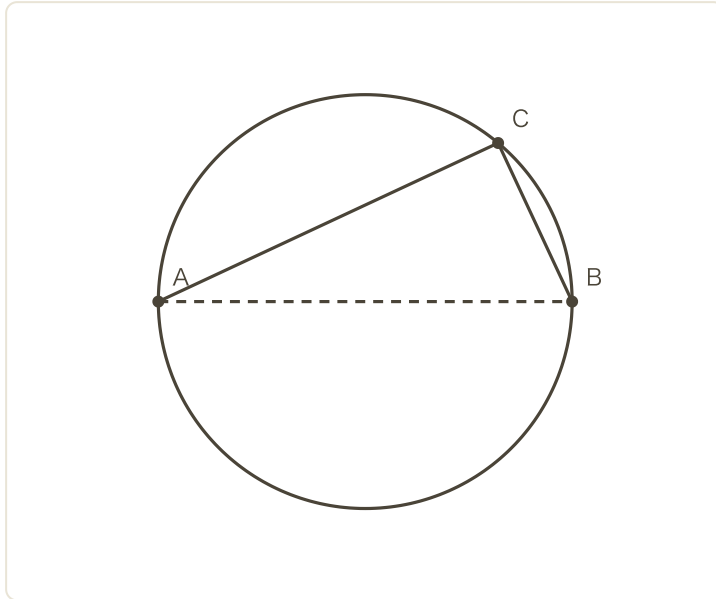
P, Qは同じ弧（弦ABの同じ側）にあるので、同じ弦ABに対する円周角として等しい。

$\angle AQB = 48^\circ$

3

直径に対する円周角は 90°

円Oの直径をABとし、円周上に点Cをとる。 $\angle BAC = 25^\circ$ のとき、 $\angle ABC$ を求めよ。



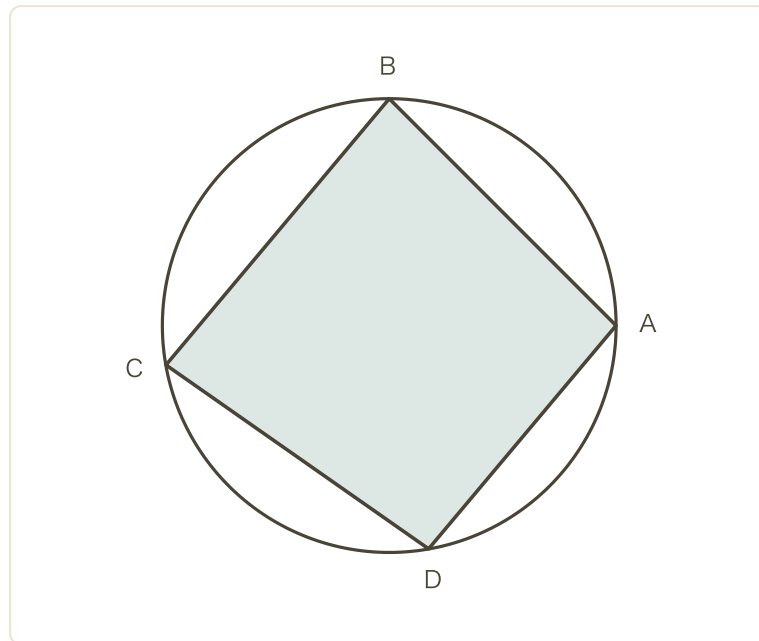
$\angle ABC =$ 65 度

直径ABに対する円周角なので $\angle ACB = 90^\circ$ 。三角形ABCの内角の和は 180° 。

$$\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

$$\angle ABC = 65^\circ$$

円に内接する四角形ABCDにおいて、 $\angle A = 95^\circ$ である。 $\angle C$ を求めよ。



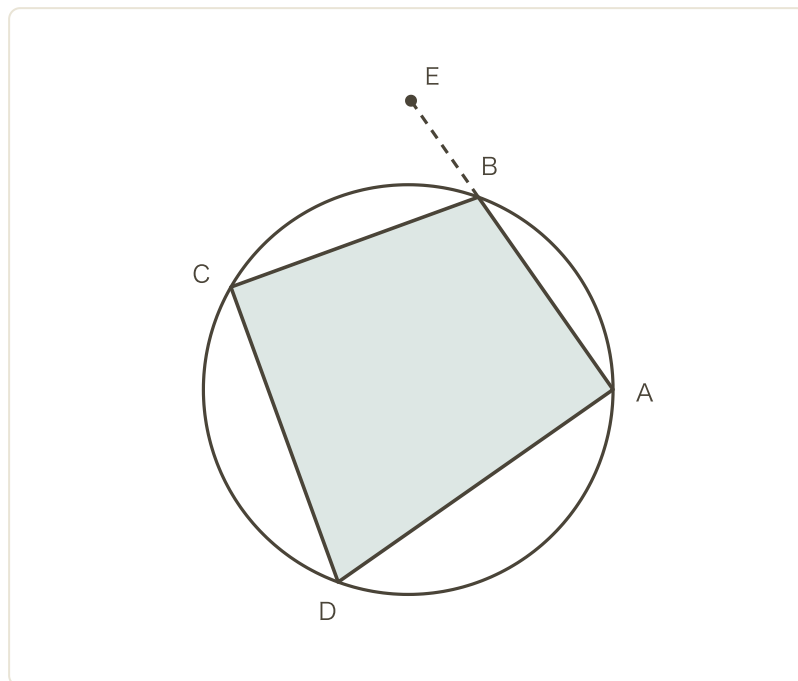
$\angle C =$ 85 度

円に内接する四角形の対角の和は 180° 。

$$\angle C = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$$

$$\angle C = 85^\circ$$

四角形ABCDが円に内接している。辺ABを延長した先の点をEとする。 $\angle ADC = 75^\circ$ のとき、外角 $\angle CBE$ を求めよ。



$\angle CBE =$ 75 度

内接四角形の外角は、それと向かい合う内角に等しい。

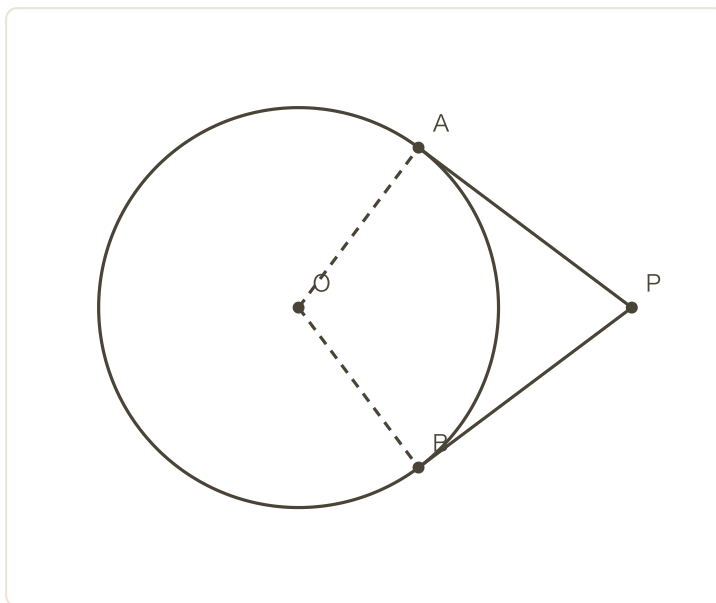
$$\angle CBE = \angle ADC = 75^\circ$$

$$\angle CBE = 75^\circ$$

6

接線の長さは等しい

円Oの外部の点Pから円に2本の接線を引き、接点をそれぞれA, Bとする。 $PA = 7$ のとき、 PB を求めよ。

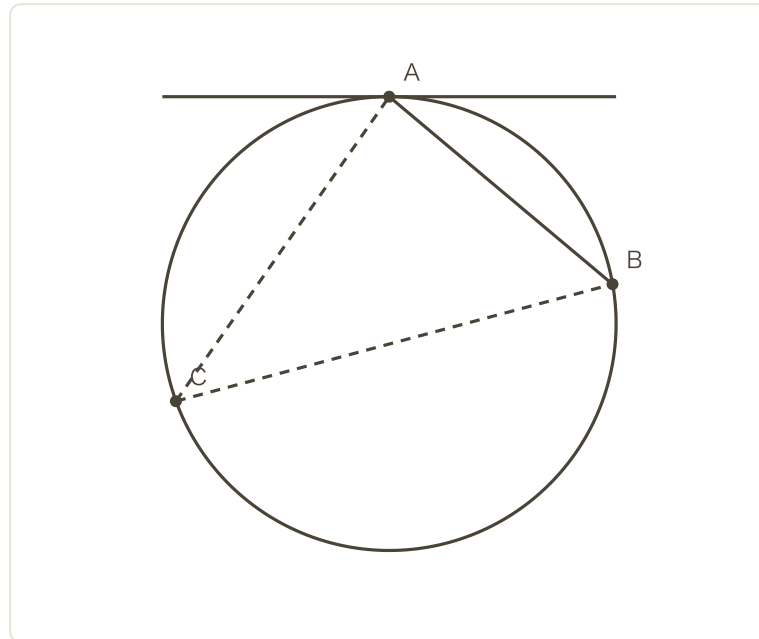


PB= 7

円外の1点から引いた2本の接線の長さは等しい。

PB = 7

円の接線と弦がつくる角（接弦定理の角）が 42° であるとき、それに等しい円周角（弧の反対側から見た角）の大きさを求めよ。

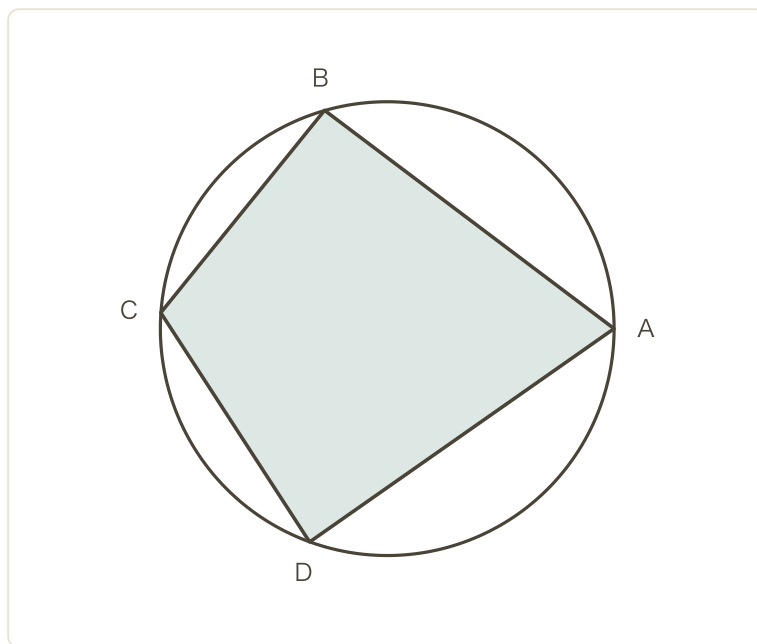


円周角 = 42 度

接弦定理より、接線と弦がつくる角は、反対側の弧に対する円周角に等しい。

円周角 = 42°

円に内接する四角形ABCDにおいて、 $\angle A = (2x + 10)^\circ$ 、 $\angle C = (3x + 15)^\circ$ と表される。 x の値と $\angle A$ の大きさを求めよ。



$$x = \underline{31} \quad \angle A = \underline{72} \text{ 度}$$

対角の和は 180° なので

$$(2x + 10) + (3x + 15) = 180$$

$$5x + 25 = 180$$

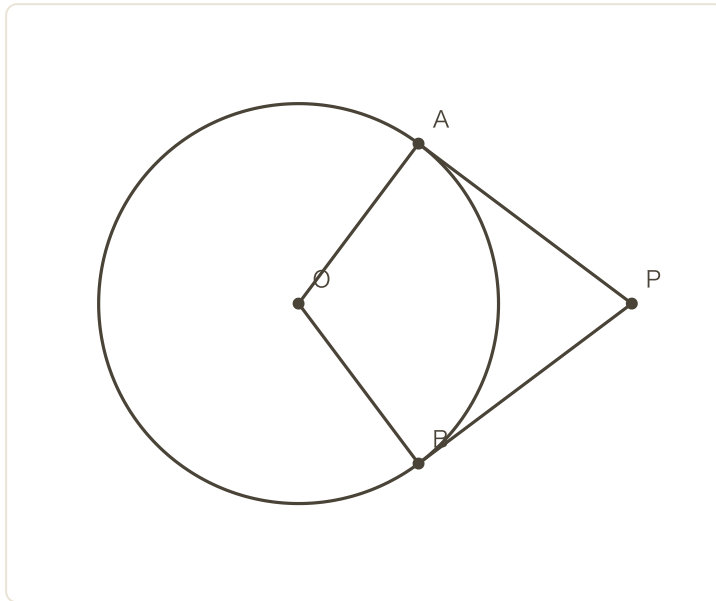
$$5x = 155$$

$$x = 31$$

$$\angle A = 2 \times 31 + 10 = 72^\circ$$

$$x = 31, \angle A = 72^\circ$$

円Oの外部の点Pから円に2本の接線を引き、接点をそれぞれA, Bとする。
 $\angle APB = 50^\circ$ のとき、四角形OAPBにおける $\angle AOB$ を求めよ。



$\angle AOB =$ 130 度

接線は接点における半径と垂直なので $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ 。四角形OAPBの内角の和は 360° なので

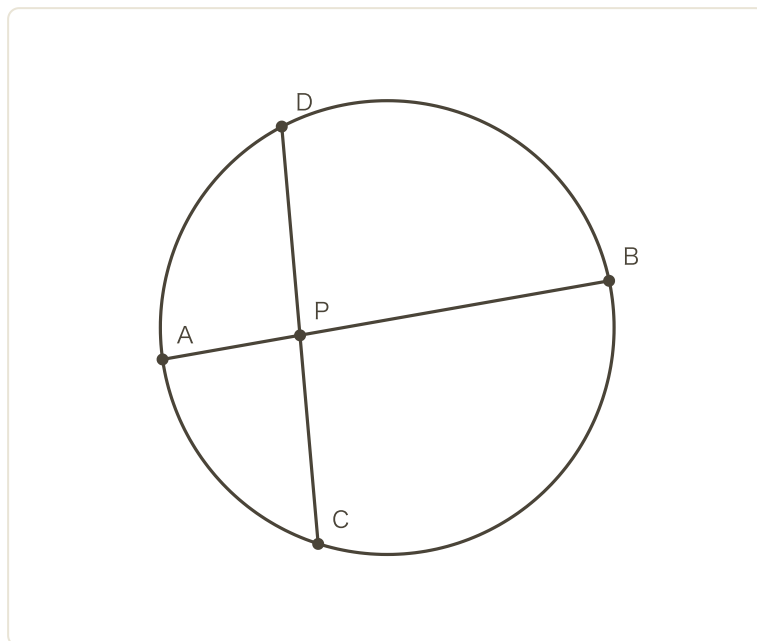
$$\angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\angle AOB = 130^\circ$$

10

方べき・2弦（内部の点）

円の内部の点Pで2本の弦AB, CDが交わっている。 $PA = 4$, $PB = 9$, $PC = 6$ のとき、 PD を求めよ。

PD= 6方べきの定理より $PA \times PB = PC \times PD$

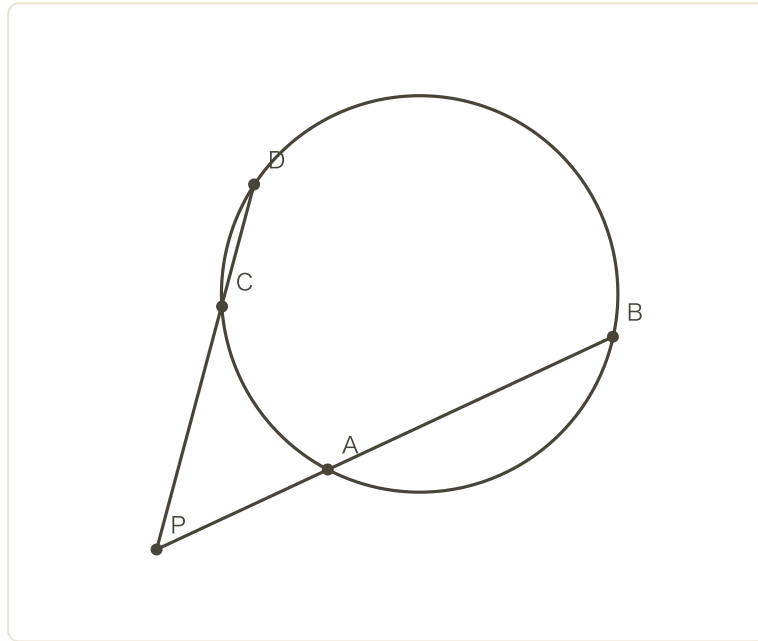
$$4 \times 9 = 6 \times PD$$

$$36 = 6PD$$

$$PD = 6$$

$$PD = 6$$

円の外部の点Pから2本の割線を引く。1本目はPと近い方の交点Aとの距離が $PA = 3$ 、遠い方の交点Bまでの弦 $AB = 5$ である。2本目は近い方の交点Cとの距離が $PC = 4$ である。もう一方の遠い方の交点をDとすると、 PD を求めよ。



PD= 6

$$PB = PA + AB = 3 + 5 = 8$$

$$\text{方べきの定理より } PA \times PB = PC \times PD$$

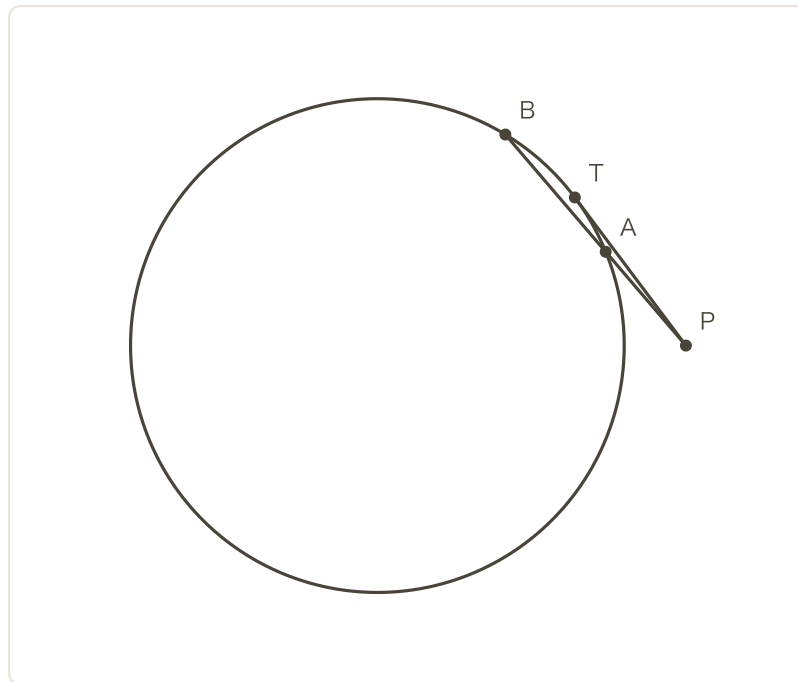
$$3 \times 8 = 4 \times PD$$

$$24 = 4PD$$

$$PD = 6$$

$$\mathbf{PD = 6}$$

円Oの外部の点Pから接線PT（Tは接点）と割線を引く。割線は円とA（近い方）、B（遠い方）で交わり、 $PA = 4$, $AB = 5$ である。 PT を求めよ。



PT= 6

$$PB = PA + AB = 4 + 5 = 9$$

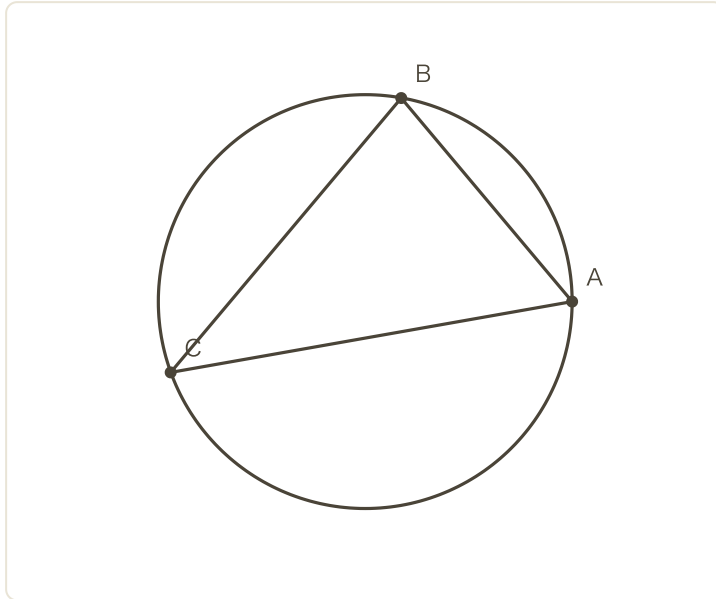
$$\text{方べきの定理より } PT^2 = PA \times PB$$

$$PT^2 = 4 \times 9 = 36$$

$$PT = \sqrt{36} = 6$$

$$PT = 6$$

円周上の3点A, B, Cによって円周が3つの弧に分けられ、弧AB : 弧BC : 弧CA = 2 : 3 : 4であるとき、 $\angle BAC$ (頂点Aにおける角) を求めよ。



$\angle BAC =$ 60 度

弧全体 360° を比2 : 3 : 4 (和9) で分けるので、1つ分は $360^\circ \div 9 = 40^\circ$ 。

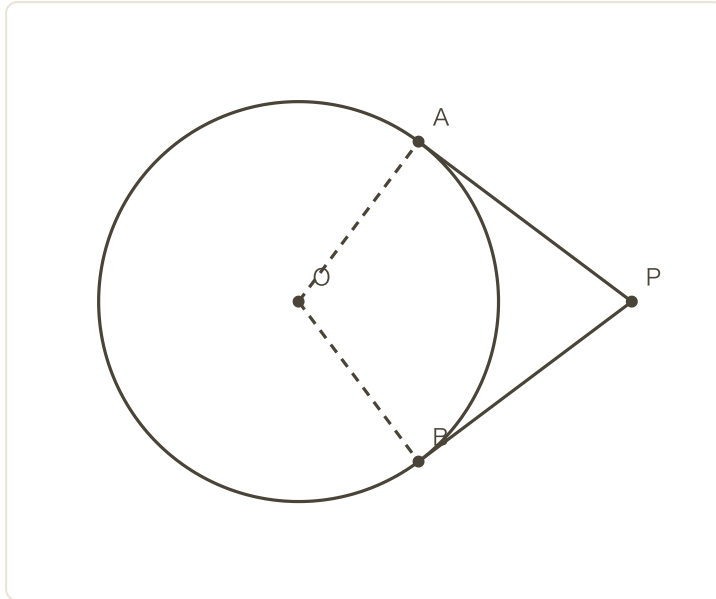
弧BC = $3 \times 40^\circ = 120^\circ$

$\angle BAC$ は弧BC (Aを含まない側) に対する円周角なので、その半分。

$\angle BAC = 120^\circ \div 2 = 60^\circ$

$\angle BAC = 60^\circ$

円Oの外部の点Pから2本の接線を引き、接点をA, Bとする。 $\angle APB = 44^\circ$ のとき、 $\angle PAB$ の大きさを求めよ。



$\angle PAB =$ 68 度

接線の長さは等しいので $PA = PB$ 、三角形PABは二等辺三角形。底角 $\angle PAB = \angle PBA$ は等しいので

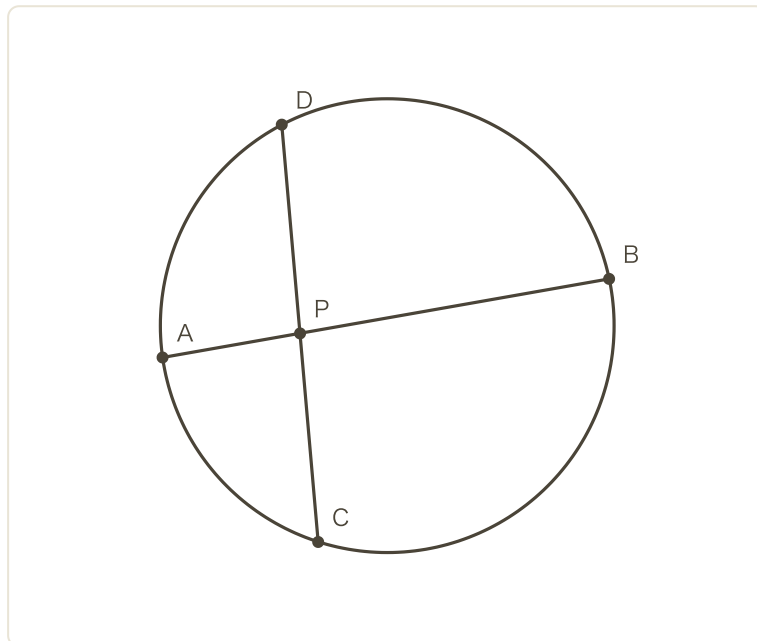
$$\angle PAB = (180^\circ - 44^\circ) \div 2 = 136^\circ \div 2 = 68^\circ$$

$$\angle PAB = 68^\circ$$

15

方べき・2次方程式 (2弦)

円の内部の点Pを通る2本の弦があり、一方は $PA = x$, $PB = x + 2$ 、他方は $PC = 4$, $PD = 6$ である。方べきの定理を用いて x の値を求めよ (x は正の実数とする)。



$$x = \underline{4}$$

方べきの定理より $PA \times PB = PC \times PD$

$$x(x + 2) = 4 \times 6$$

$$x^2 + 2x = 24$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

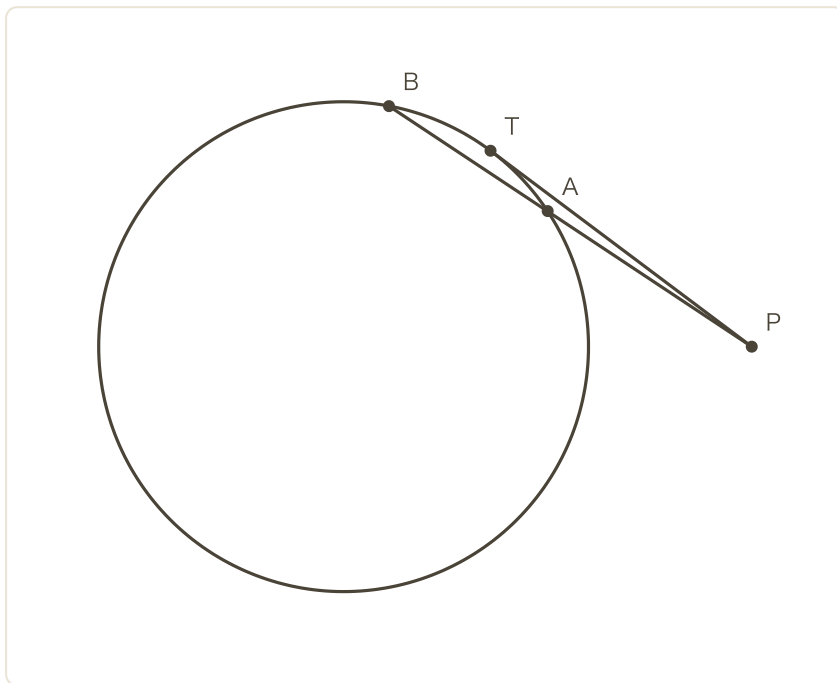
$$(x + 6)(x - 4) = 0$$

$$x = 4, -6$$

x は正の実数なので $x = -6$ は不適。

$$x = 4$$

円Oの外部の点Pから接線PT（Tは接点）と割線を引く。割線は円とA（近い方）、B（遠い方）で交わり、 $AB = 7$, $PT = 12$ である。 $PA(=x)$ の値を求めよ（ x は正の実数とする）。



$$x = \underline{9}$$

$$PB = PA + AB = x + 7. \text{ 方べきの定理より } PT^2 = PA \times PB$$

$$12^2 = x(x + 7)$$

$$144 = x^2 + 7x$$

$$x^2 + 7x - 144 = 0$$

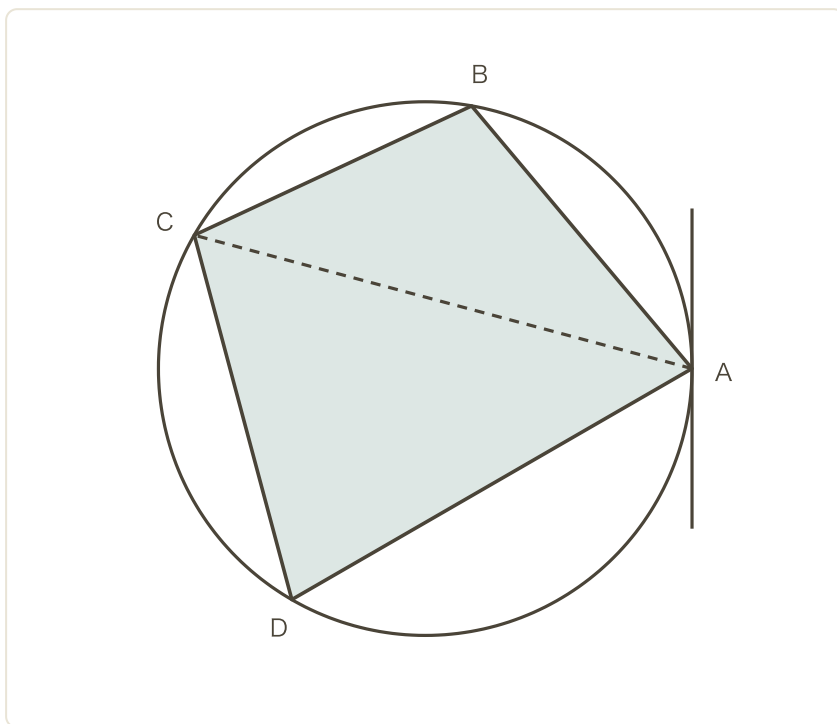
$$(x - 9)(x + 16) = 0$$

$$x = 9, -16$$

x は正の実数なので $x = -16$ は不適。

$$x = 9$$

円に内接する四角形ABCDで対角線ACを引く。点Aにおける接線と辺ABのなす角（弧ABをはさむ側の角）が 40° 、 $\angle BCD = 100^\circ$ のとき、 $\angle ACD$ の大きさを求めよ。



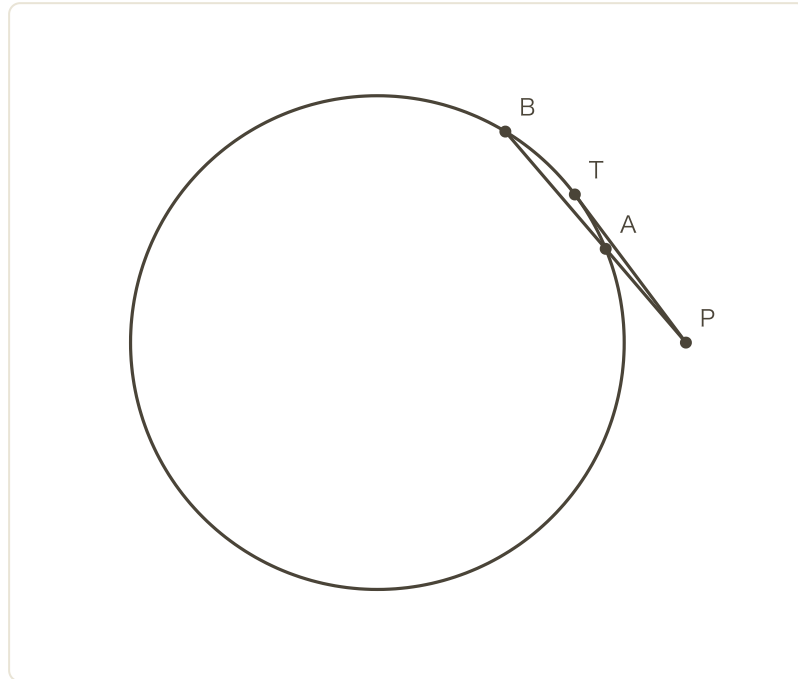
$\angle ACD =$ 60 度

接弦定理より、点Aでの接線と辺ABのなす角は、反対側の弧（C, Dを含む側）に対する円周角に等しい。Cはその弧の上にあるので
 $\angle ACB = 40^\circ$ （接線と弦ABのなす角に等しい）

対角線ACは $\angle BCD$ を $\angle ACB$ と $\angle ACD$ に分けるので
 $\angle ACD = \angle BCD - \angle ACB = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$

$\angle ACD = 60^\circ$

円の外部の点Pから接線PTを引き、Tを接点とする。また、Pを通る割線が円とA, B（Aが近い方）で交わり、 $PA : AB = 1 : 2$ である。 $PT = 6$ のとき、 PA の長さを求めよ（ $PA = x$ とおき、 x は正の実数とする）。



PA = $2\sqrt{3}$

$PA : AB = 1 : 2$ なので $AB = 2x$ 、 $PB = PA + AB = x + 2x = 3x$ 。

方べきの定理より $PT^2 = PA \times PB$

$$6^2 = x \times 3x$$

$$36 = 3x^2$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{（} x \text{は正の実数なので} -2\sqrt{3} \text{は不適）}$$

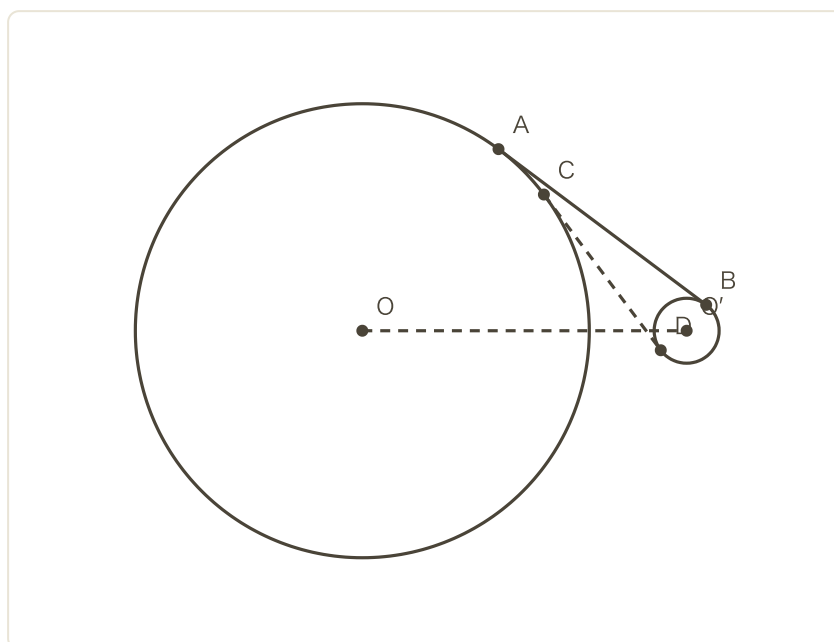
$$PA = 2\sqrt{3}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。2円の共通接線や方べき×相似の融合など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

半径7の円Oと半径1の円O'があり、中心間の距離 $OO' = 10$ である。(1) この2円の共通**外**接線の長さを求めよ。(2) この2円の共通**内**接線の長さを求めよ。



実線ABが共通外接線、点線CDが共通内接線。 $OO' = 10$ 。

(1) 外接線 = 8 (2) 内接線 = 6

(1) 共通外接線は、半径の**差**を使った直角三角形で求まる。接線の長さを L とすると

$$L^2 = OO'^2 - (7 - 1)^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$L = \sqrt{64} = 8$$

共通外接線の長さ = 8

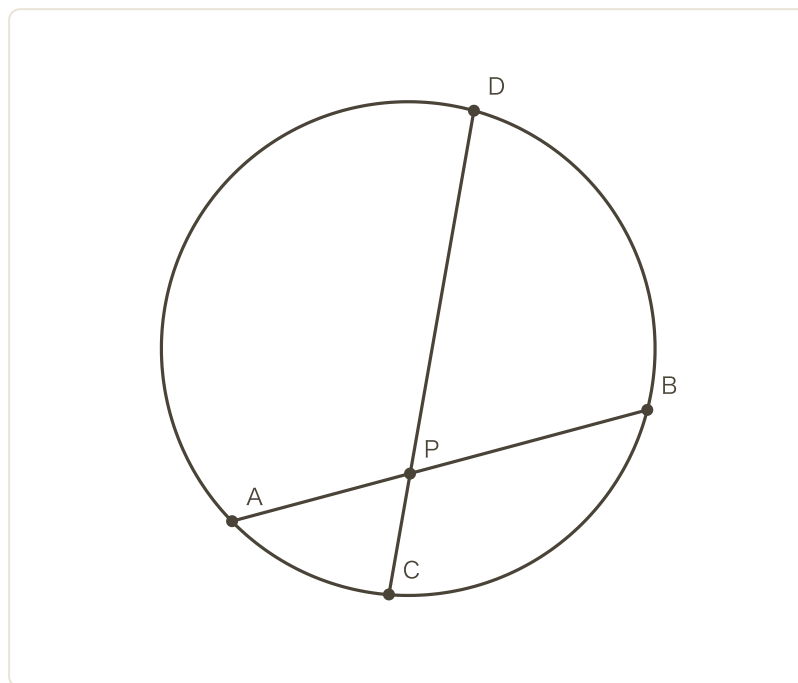
(2) 共通内接線は、半径の**和**を使った直角三角形で求まる (2円の間を横切るため)。

$$L^2 = OO'^2 - (7 + 1)^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

$$L = \sqrt{36} = 6$$

共通内接線の長さ = 6

円の内部の点Pで2本の弦AB, CDが交わっている。 $PA = 6$, $PB = 8$, $PC = 4$ である。(1) PD を求めよ。(2) 三角形PACと三角形PDBが相似であることを利用して、 $AC : DB$ を求めよ。



(1) $PD =$ 12 (2) $AC : DB = 1 :$ 2

(1) 方べきの定理より $PA \times PB = PC \times PD$

$$6 \times 8 = 4 \times PD$$

$$48 = 4PD$$

$$PD = 12$$

$$PD = 12$$

(2) 三角形PACと三角形PDBにおいて、 $\angle APC = \angle DPB$ (対頂角)、また弧BCに対する円周角として $\angle PAC = \angle CAB = \angle CDB = \angle PDB$ (同じ弧BCに対する円周角は等しい)。よって2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle PAC \sim \triangle PDB$$

対応する辺の比より $AC : DB = PA : PD = 6 : 12 = 1 : 2$ ($PC : PB = 4 :$

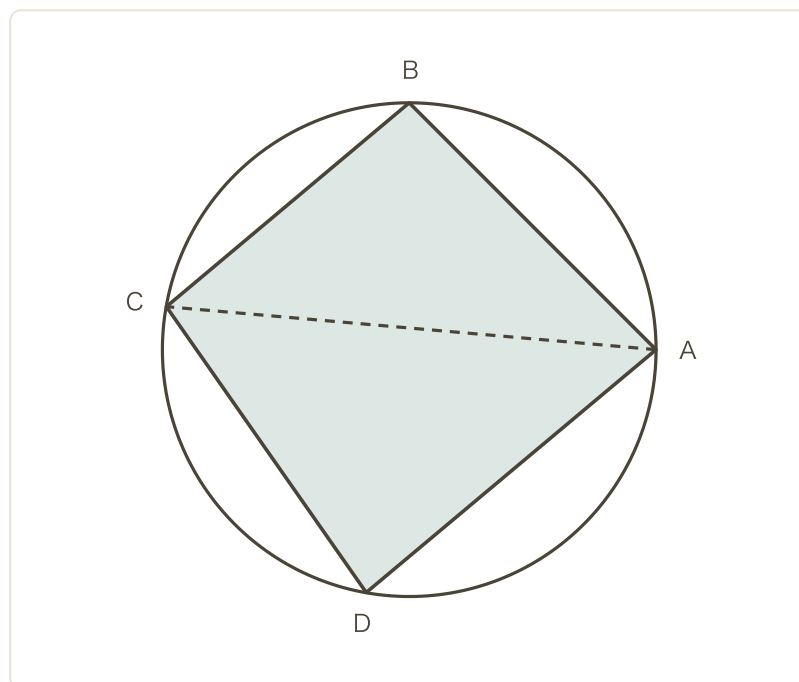
$8 = 1 : 2$ とも一致する)

$$AC : DB = 1 : 2$$

応3

内接四角形と円周角の総合

円に内接する四角形ABCDで対角線ACを引く。 $\angle ABC = 95^\circ$ 、 $\angle BAC = 40^\circ$ のとき、(1) $\angle BCA$ を求めよ。(2) $\angle ADC$ を求めよ。



(1) $\angle BCA =$ 45 度 (2) $\angle ADC =$ 85 度

(1) 三角形ABCの内角の和は 180° 。

$$\angle BCA = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 180^\circ - 95^\circ - 40^\circ = 45^\circ$$

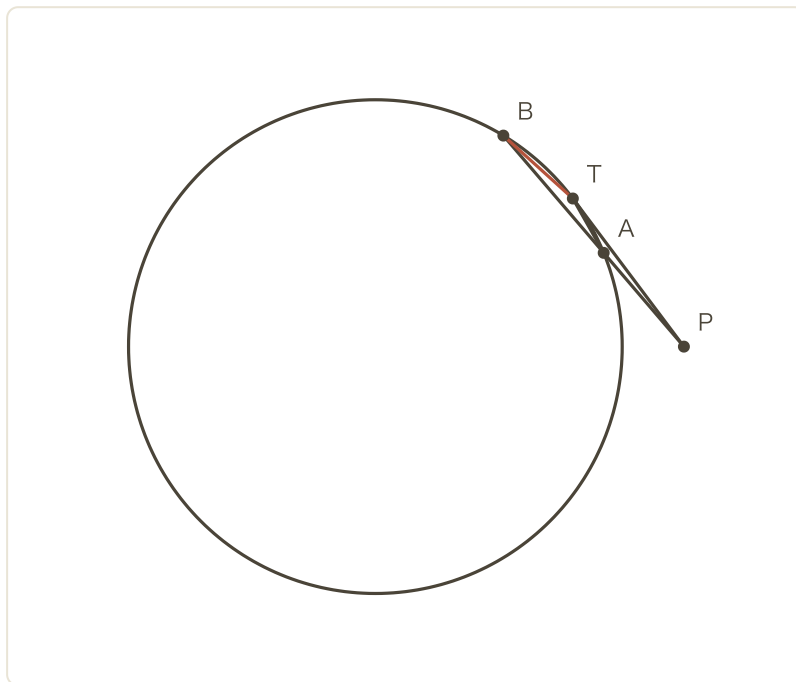
$$\angle BCA = 45^\circ$$

(2) 円に内接する四角形の対角の和は 180° 。 $\angle ADC$ と $\angle ABC$ は対角なので

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$$

$$\angle ADC = 85^\circ$$

円Oの外部の点Pから接線PT（Tは接点）と割線を引く。割線は円とA（近い方）、B（遠い方）で交わり、 $PT = 6$, $PA = 4$ である。(1) PB を求めよ。(2) 三角形PTAと三角形PBTが相似であることを利用して、 $TA : TB$ を求めよ。さらに $TA = 3$ のとき TB を求めよ。



(1) $PB = \underline{9}$ (2) $TA : TB = 2 : \underline{3}$ 、 $TB = \underline{4.5}$

(1) 方べきの定理より $PT^2 = PA \times PB$

$$36 = 4 \times PB$$

$$PB = 9$$

$$PB = 9$$

(2) 三角形PTAと三角形PBTにおいて、 $\angle P$ は共通。また接弦定理より、接線PTと弦TAのなす角 $\angle PTA$ は、反対側の弧に対する円周角 $\angle TBA = \angle TBP$ に等しい。よって2組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle PTA \sim \triangle PBT$$

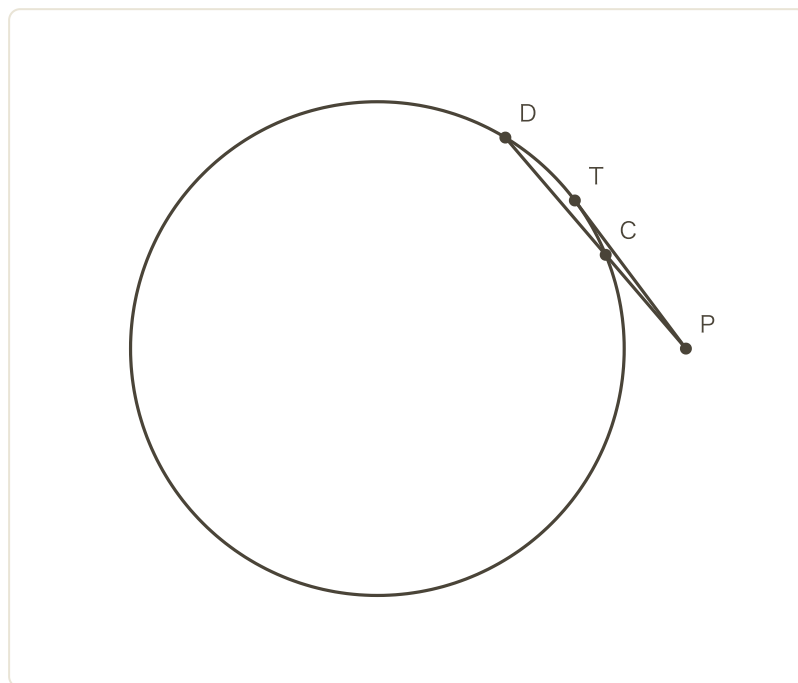
$$\text{対応する辺の比より } TA : TB = PA : PT = 4 : 6 = 2 : 3$$

$TA = 3$ のとき、比 $2 : 3$ を使うと

$$TB = 3 \times \frac{3}{2} = 4.5$$

$$TA : TB = 2 : 3、TB = 4.5$$

円Oの外部の点Pから接線PT (Tは接点) を引く。また、Pを通る割線が円とC (近い方) , D (遠い方) で交わる。接線と弦TCのなす角 $\angle PTC = 50^\circ$ のとき、(1) $\angle TDC$ を求めよ。 また $PT = 9$, $PC = 3$ のとき、(2) PD を求めよ。



(1) $\angle TDC =$ 50 度 (2) $PD =$ 27

(1) 接弦定理より、接線PTと弦TCのなす角は、反対側の弧に対する円周角に等しい。
Dはその弧上にあるので

$$\angle TDC = \angle PTC = 50^\circ$$

$$\angle TDC = 50^\circ$$

(2) 方べきの定理より $PT^2 = PC \times PD$

$$9^2 = 3 \times PD$$

$$81 = 3PD$$

$$PD = 27$$

$$PD = 27$$