

チェバの定理・メネラウスの定理

解答（全21問）

氏名 _____

得点 /21点

DRILL

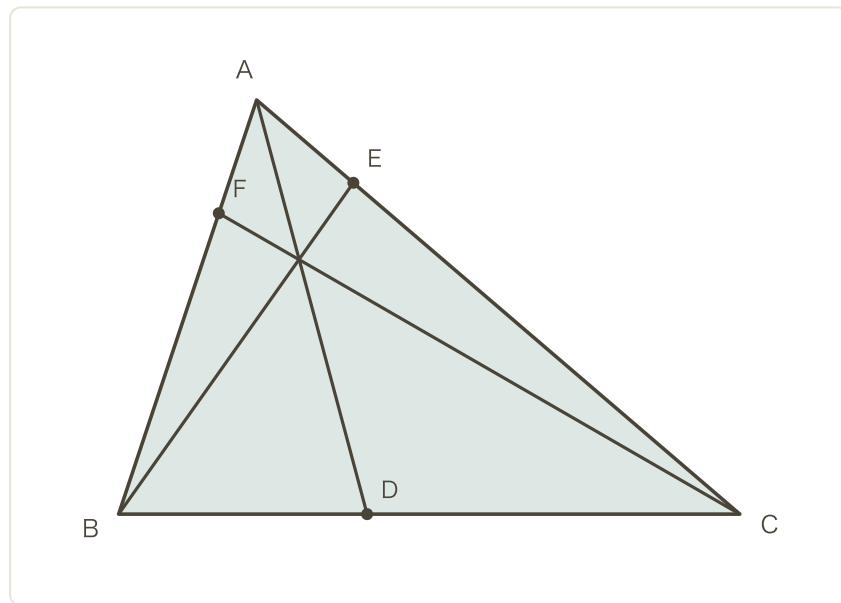
練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

チェバの定理・基本

辺BC上の点D、辺CA上の点E、辺AB上の点Fについて、3直線AD, BE, CFが1点で交わっている。 $BD : DC = 2 : 3$ 、 $CE : EA = 4 : 1$ のとき、 $AF : FB$ を求めよ。

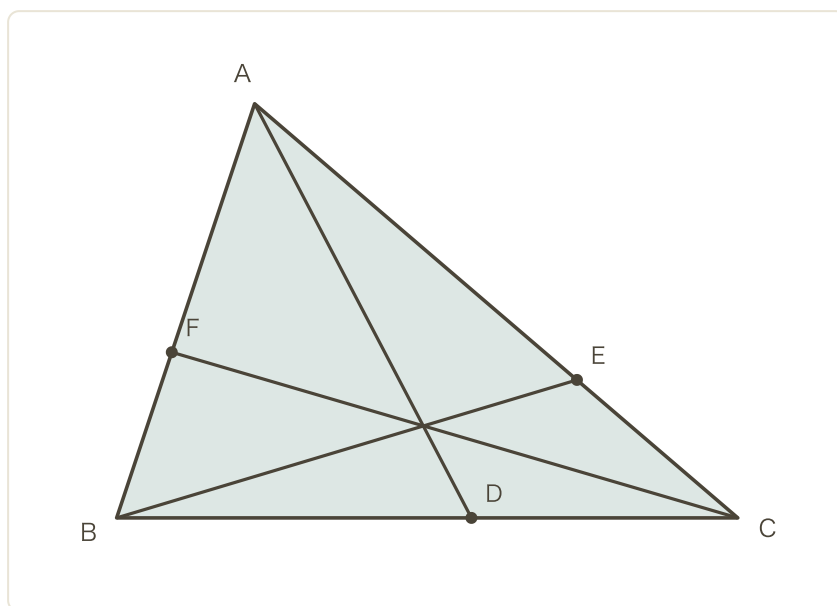


$$AF : FB = 3 : \underline{8}$$

$$\begin{aligned} &\text{チェバの定理より } \frac{2}{3} \times \frac{4}{1} \times \frac{AF}{FB} = 1 \\ &\frac{8}{3} \times \frac{AF}{FB} = 1 \\ &\frac{AF}{FB} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$AF : FB = 3 : 8$$

同じように3直線が1点で交わる時、 $CE : EA = 1 : 2$ 、 $AF : FB = 3 : 2$ ならば $BD : DC$ を求めよ。



$$BD : DC = 4 : \underline{3}$$

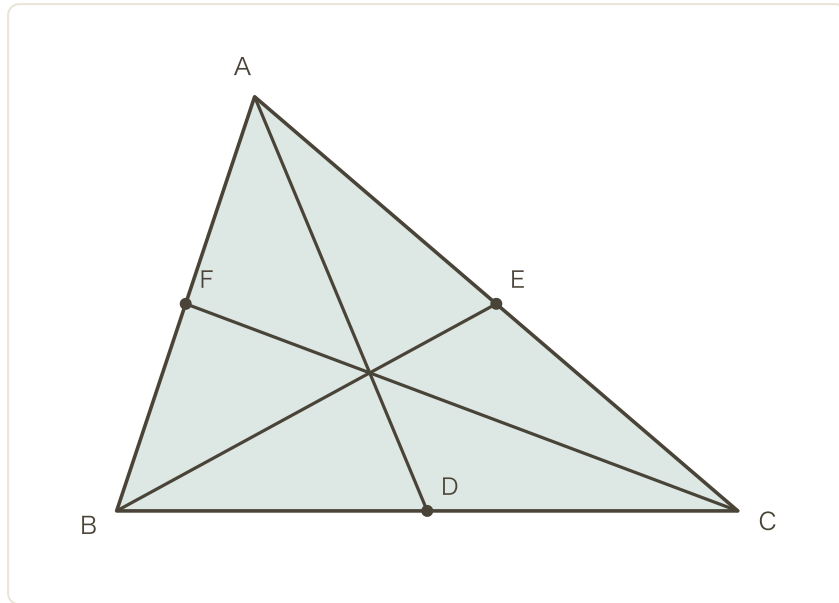
$$\text{チェバの定理より } \frac{BD}{DC} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{4}{3}$$

$$BD : DC = 4 : 3$$

点Dが辺BCの midpoint、点Fが辺ABの midpointであるとき（3本の中線は1点＝重心で交わる）、 $CE : EA$ を求めよ。



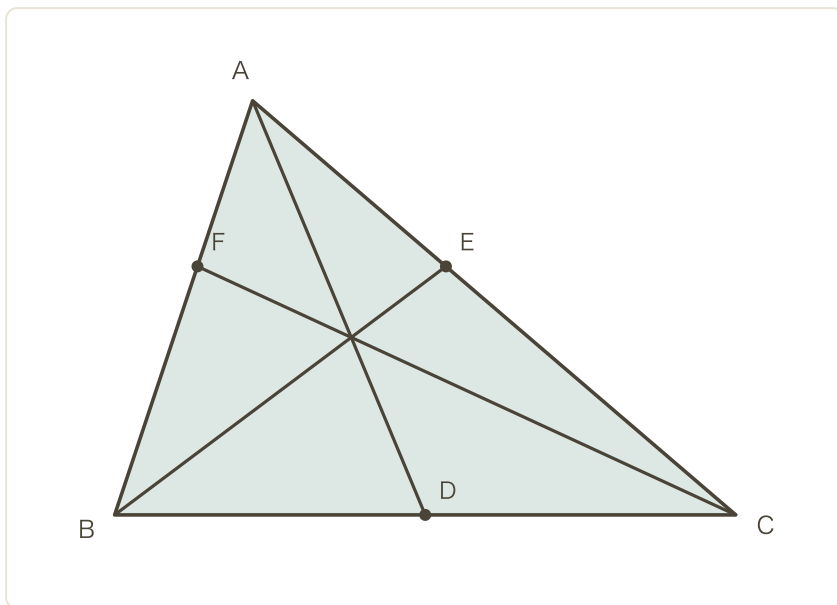
$$CE : EA = 1 : \underline{1}$$

Dが midpoint なので $BD : DC = 1 : 1$ 、Fが midpoint なので $AF : FB = 1 : 1$ 。

$$\text{チェバの定理より } 1 \times \frac{CE}{EA} \times 1 = 1$$

$$CE : EA = 1 : 1 \text{ (Eも辺CAの midpointになる)}$$

$BD : DC = 1 : 1$ (Dは辺BCの中点)、 $AF : FB = 2 : 3$ のとき、 $CE : EA$ を求めよ。



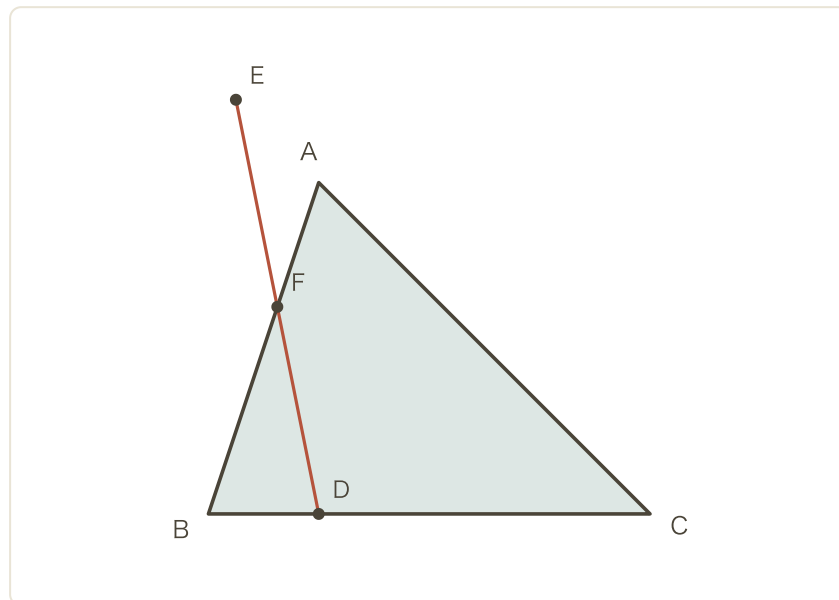
$$CE : EA = 3 : \underline{2}$$

$$\text{チェバの定理より } 1 \times \frac{CE}{EA} \times \frac{2}{3} = 1$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$$

$$CE : EA = 3 : 2$$

1本の直線が、辺BC上の点D、辺ABの内部の点F、そして辺CAの延長上（Aの外側）の点Eを通っている。 $BD : DC = 1 : 3$ 、 $CE : EA = 5 : 1$ のとき、 $AF : FB$ を求めよ。



$$AF : FB = 3 : \underline{5}$$

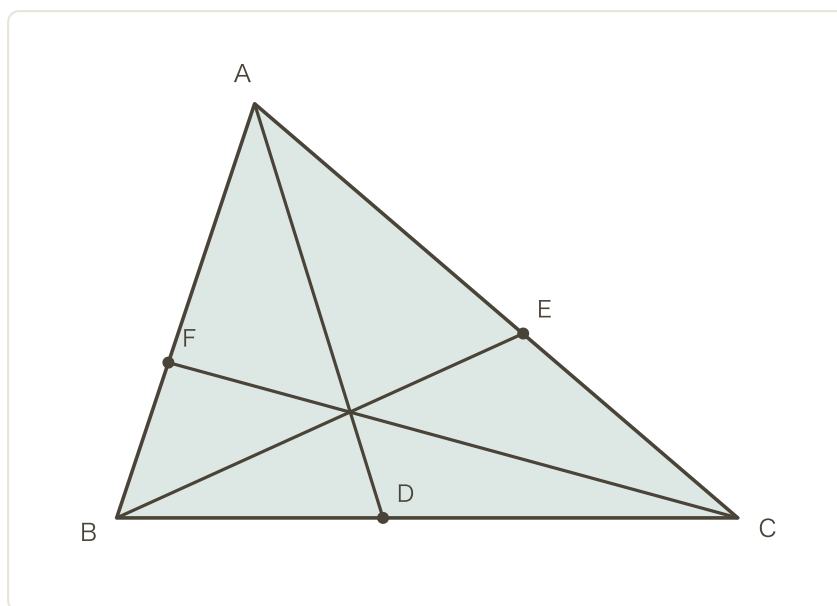
$$\text{メネラウスの定理より } \frac{1}{3} \times \frac{5}{1} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{3}{5}$$

$$AF : FB = 3 : 5$$

3直線AD, BE, CFが1点で交わっている。 $AF : FB = 5 : 3$ 、 $CE : EA = 4 : 5$ のとき、 $BD : DC$ を求めよ。



$$BD : DC = 3 : \underline{4}$$

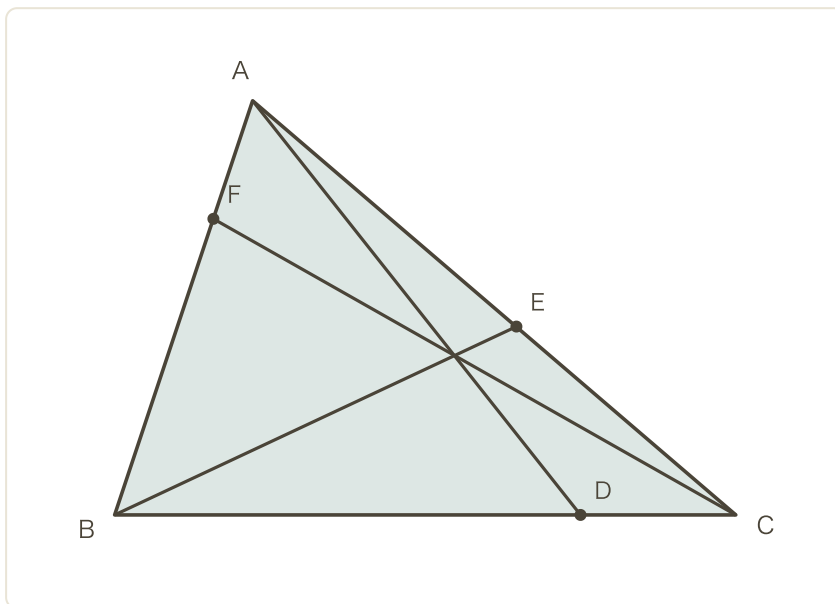
チェバの定理より $\frac{BD}{DC} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = 1$

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{4}{3} = 1$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$$

$$BD : DC = 3 : 4$$

- 7 3直線AD, BE, CFが1点で交わっている。 $BD : DC = 3 : 1$ 、 $AF : FB = 2 : 5$ のとき、 $CE : EA$ を求めよ。



$$CE : EA = 5 : \underline{6}$$

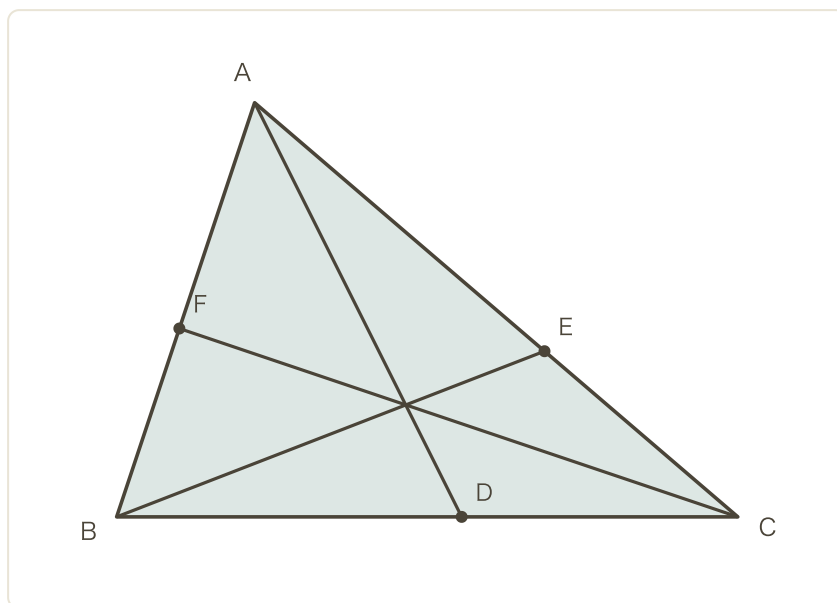
$$\text{チェバの定理より } \frac{3}{1} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{2}{5} = 1$$

$$\frac{6}{5} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{5}{6}$$

$$CE : EA = 5 : 6$$

- 8 3直線AD, BE, CFが1点で交わっている。 $BD : DC = 5 : 4$ 、 $CE : EA = 2 : 3$ のとき、 $AF : FB$ を求めよ。



$$AF : FB = 6 : \underline{5}$$

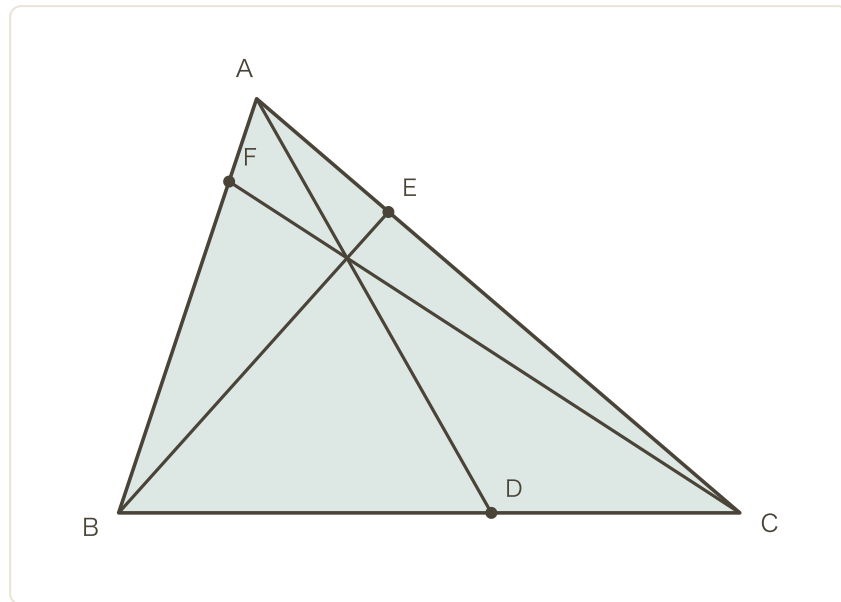
$$\text{チェバの定理より } \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{6}{5}$$

$$AF : FB = 6 : 5$$

- 9 3直線AD, BE, CFが1点で交わっている。 $AF : FB = 1 : 4$ 、 $BD : DC = 3 : 2$ のとき、 $CE : EA$ を求めよ。



$$CE : EA = 8 : \underline{3}$$

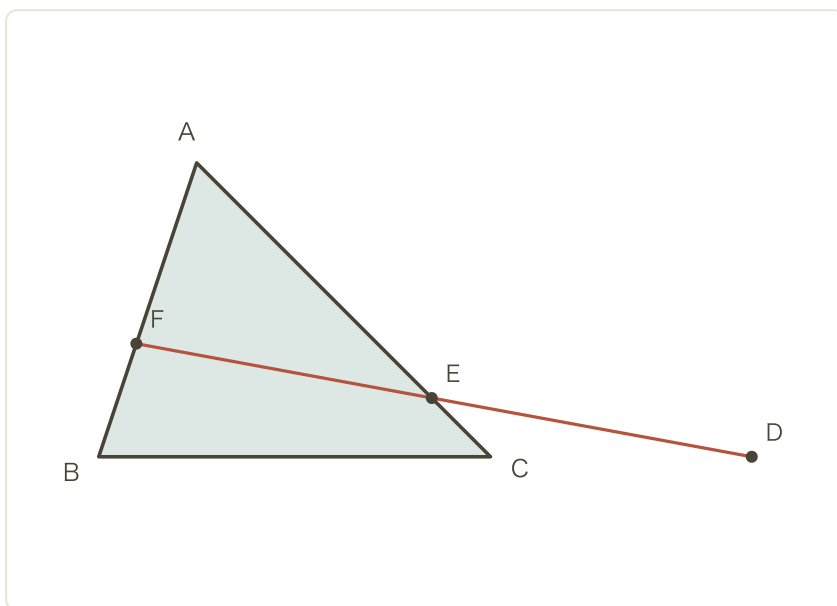
$$\text{チェバの定理より } \frac{3}{2} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{8}{3}$$

$$CE : EA = 8 : 3$$

- 10 1本の直線が、辺CA上の点E、辺AB上の点F、そして辺BCの延長上（Cの外側）の点Dを通っている。 $BD : DC = 5 : 2$ 、 $CE : EA = 1 : 4$ のとき、 $AF : FB$ を求めよ。



$$AF : FB = 8 : \underline{5}$$

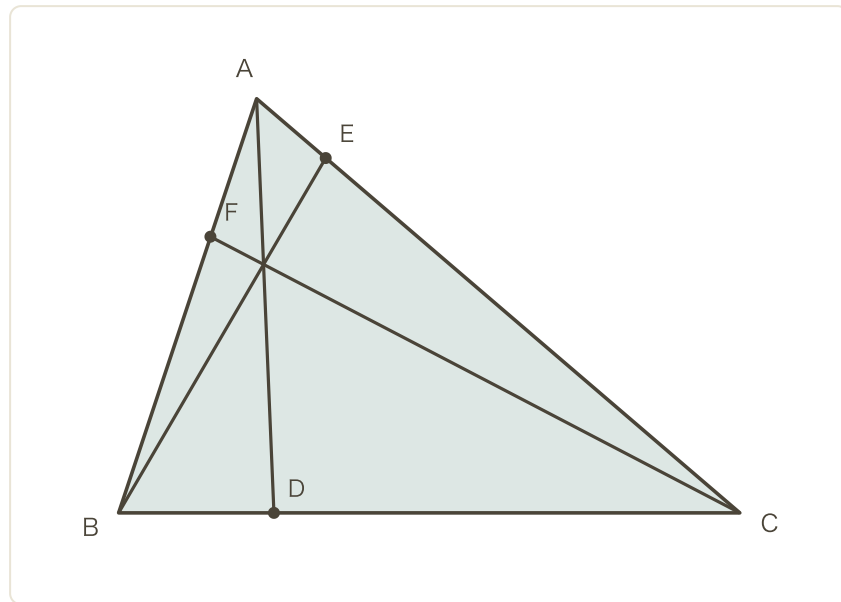
$$\text{メネラウスの定理より } \frac{5}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{5}{8} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{8}{5}$$

$$AF : FB = 8 : 5$$

- 11 3直線AD, BE, CFが1点で交わっている。 $BD : DC = 1 : 3$ 、 $AF : FB = 1 : 2$ のとき、 $CE : EA$ を求めよ。



$$CE : EA = 6 : \underline{1}$$

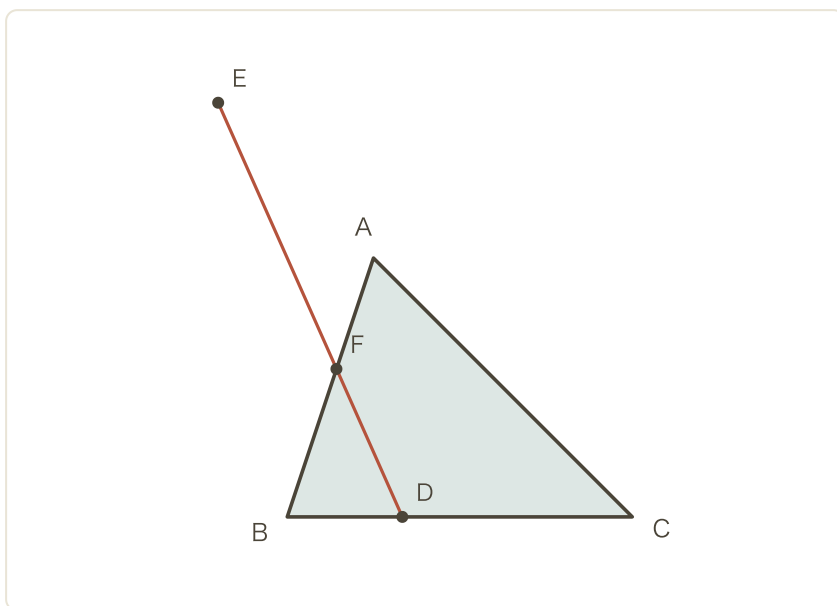
$$\text{チェバの定理より } \frac{1}{3} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{6} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{CE}{EA} = 6$$

$$CE : EA = 6 : 1$$

- 12 1本の直線が、辺BC上の点D、辺AB上の点F、そして辺CAの延長上（Aの外側）の点Eを通っている。 $BD : DC = 1 : 2$ 、 $AF : FB = 3 : 4$ のとき、 $CE : EA$ を求めよ。



$$CE : EA = 8 : \underline{3}$$

$$\begin{aligned} \text{メネラウスの定理より } \frac{1}{2} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{3}{4} &= 1 \\ \frac{3}{8} \times \frac{CE}{EA} &= 1 \\ \frac{CE}{EA} &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

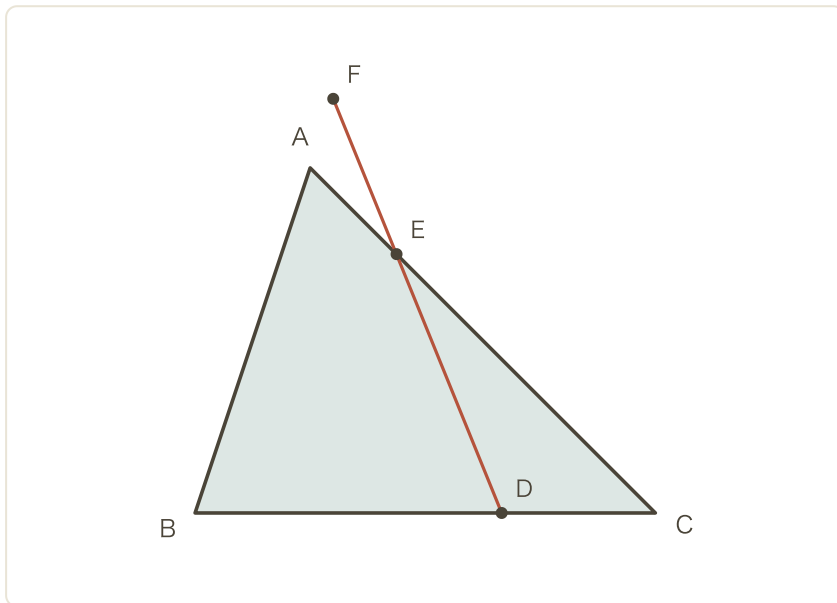
$$CE : EA = 8 : 3$$

挑戦 (13~16)

13

メネラウスの定理・要注意 (Fの位置に気をつける)

1本の直線が、辺BC上の点D、辺CA上の点Eを通っている。 $BD : DC = 2 : 1$ 、 $CE : EA = 3 : 1$ のとき、 $AF : FB$ を求めよ。ただし、Fが辺ABの内部にあるか延長上にあるかは自分で判断すること。



$$AF : FB = 1 : \underline{6}$$

$$\text{メネラウスの定理より } \frac{2}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

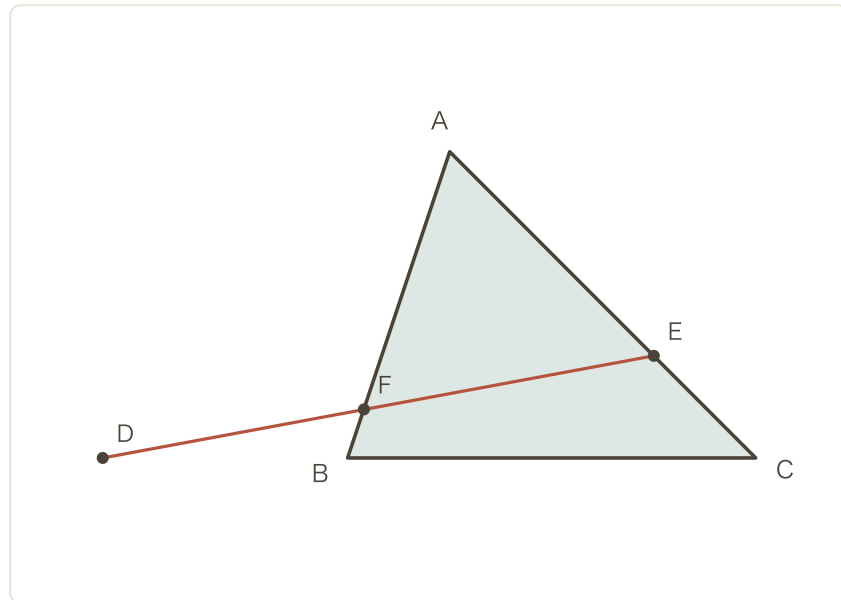
$$6 \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{1}{6}$$

D, Eはどちらも辺の内部（外部の点は0個）なので、メネラウスの定理が成り立つには残りのFが辺の延長上（外部）になければならない（外部の点は必ず1個か3個）。よってFは**辺ABの延長上（Aの外側）**にある。

$$AF : FB = 1 : 6 \text{ (Fは辺ABの延長上)}$$

1本の直線が、辺CA上の点E、辺AB上の点Fを通り、辺BCの延長上（Bの外側）の点Dを通っている。 $BD : DC = 3 : 8$ 、 $CE : EA = 1 : 2$ のとき、 $AF : FB$ を求めよ。



$$AF : FB = 16 : \underline{3}$$

メネラウスの定理より $\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{AF}{FB} = 1$

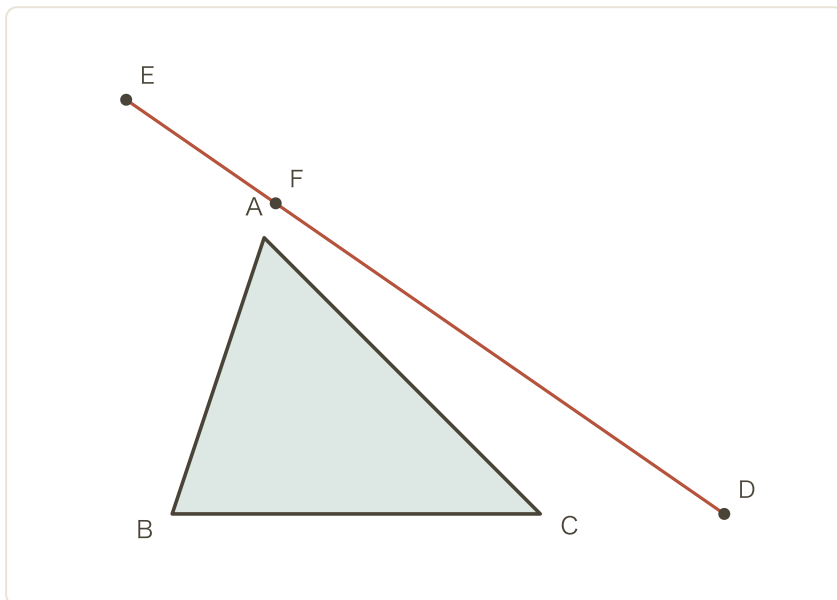
$$\frac{3}{16} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{16}{3}$$

Dが延長上（外部が1個）なので、E, Fはともに辺の内部で条件を満たす。

$$AF : FB = 16 : 3$$

三角形ABCのどの辺とも交わらず、3辺すべての延長と交わる直線がある。 $BD : DC = 3 : 1$ (Cの外側)、 $CE : EA = 3 : 1$ (Aの外側) のとき、 $AF : FB$ を求めよ (Fも辺ABの延長上にある)。



$$AF : FB = 1 : \underline{9}$$

$$\text{メネラウスの定理より } \frac{3}{1} \times \frac{3}{1} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

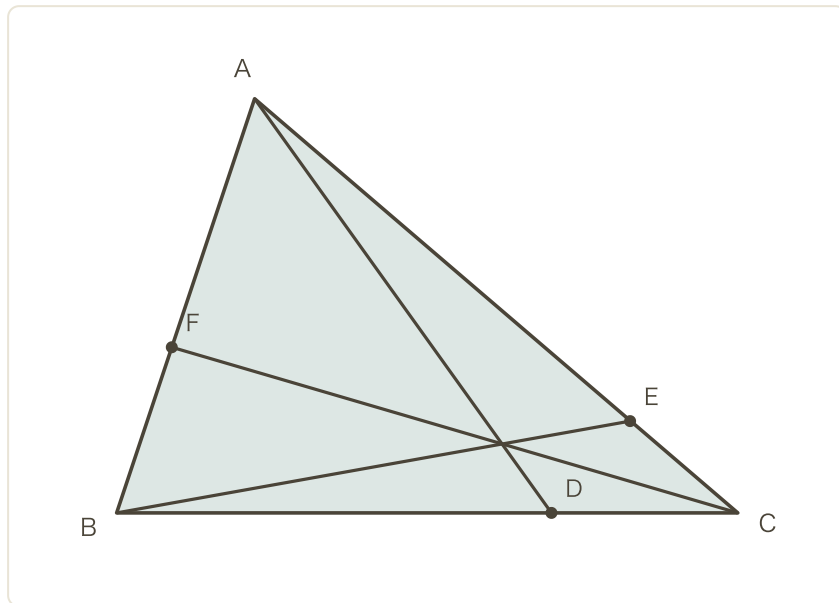
$$9 \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{1}{9}$$

D, E, Fの3個すべてが延長上（外部）にある珍しいケース。外部の点が3個（奇数個）なので、メネラウスの定理はきちんと成り立つ。三角形の外側だけを通る直線でも、この関係は崩れない。

$$AF : FB = 1 : 9 \text{ (D, E, Fの3点とも延長上)}$$

3直線AD, BE, CFが1点で交わっている。 $BD : DC = 7 : 3$ 、 $CE : EA = 2 : 7$ のとき、 $AF : FB$ を求めよ。



$$AF : FB = 3 : \underline{2}$$

$$\text{チェバの定理より } \frac{7}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{3}{2}$$

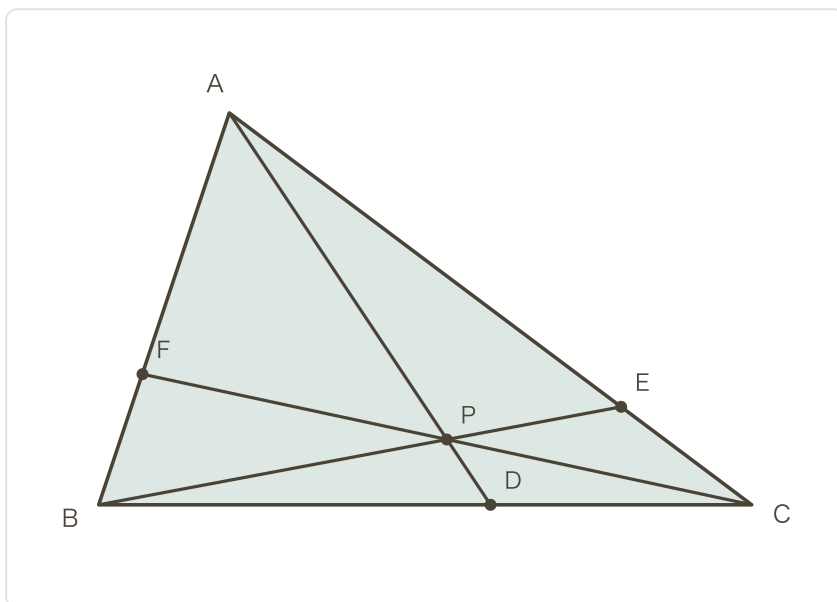
$$AF : FB = 3 : 2$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。チェバとメネラウスを組み合わせる問題、面積比の本格問題に挑戦しよう。

三角形ABCの辺BC上に点D ($BD : DC = 3 : 2$)、辺CA上に点E ($CE : EA = 1 : 3$) を取り、直線AD, BE, CFが1点Pで交わるように辺AB上に点Fを取る。(1) $AF : FB$ を求めよ。(2) 三角形ABDに、直線CPF (Fは辺AB上、Pは辺AD上、Cは辺BDの延長上) についてメネラウスの定理を用いて、 $AP : PD$ を求めよ。



(1) $AF : FB = 2 : \underline{1}$ (2) $AP : PD = 5 : \underline{1}$

(1) チェバの定理より $\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{AF}{FB} = 1$

$$\frac{1}{2} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = 2$$

$$AF : FB = 2 : 1$$

(2) 三角形ABD (頂点A, B, D) を考える。直線CF (Cは辺BDの延長上、Pは辺AD上、Fは辺AB上) はこの三角形を切る1本の直線になっている。メネラウスの定理より

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BC}{CD} \times \frac{DP}{PA} = 1$$

$AF : FB = 2 : 1$ より $\frac{AF}{FB} = 2$ 。

$BD : DC = 3 : 2$ より $BC = BD + DC = 5$ (部分)、 $CD = 2$ (部分) なので

$$\frac{BC}{CD} = \frac{5}{2}。$$

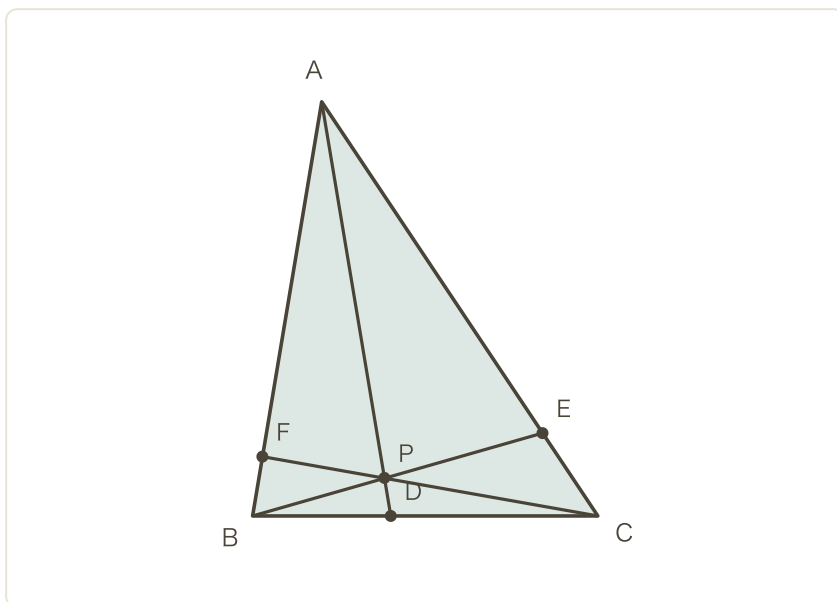
$$2 \times \frac{5}{2} \times \frac{DP}{PA} = 1$$

$$5 \times \frac{DP}{PA} = 1$$

$$\frac{DP}{PA} = \frac{1}{5}$$

$$AP : PD = 5 : 1$$

三角形ABCの辺BC上に点D（ $BD : DC = 2 : 3$ ）、辺CA上に点E（ $CE : EA = 1 : 4$ ）を取り、直線AD, BE, CFが1点Pで交わるように辺AB上に点Fを取る。三角形ABP, BCP, CAPの面積比 $S_{ABP} : S_{BCP} : S_{CAP}$ を求めよ（最も簡単な整数比で）。



$$S_{ABP} : S_{BCP} : S_{CAP} = 4 : \underline{1} : \underline{6}$$

まずチェバの定理で $AF : FB$ を求める。

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{AF}{FB} = 1 \text{ より } \frac{AF}{FB} = 6, \text{ つまり } AF : FB = 6 : 1.$$

次に三角形ABDに直線CPFでメネラウスの定理を用いて $AP : PD$ を求める。

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BC}{CD} \times \frac{DP}{PA} = 1$$

$$BD : DC = 2 : 3 \text{ より } \frac{BC}{CD} = \frac{5}{3}.$$

$$6 \times \frac{5}{3} \times \frac{DP}{PA} = 1 \text{ より } 10 \times \frac{DP}{PA} = 1, \frac{DP}{PA} = \frac{1}{10}.$$

よって $AP : PD = 10 : 1$ （ADを11等分してPはDから1、Aから10の位置）。

面積比の計算（Aからの高さで比べる）

$$S_{ABD} : S_{ABC} = BD : BC = 2 : 5$$

三角形ABDの中で、PはAD上でAP:PD=10:1なので、 $S_{PBD} : S_{ABD} = PD : AD = 1 : 11$ 。

$$S_{ABP} = S_{ABD} - S_{PBD} = \frac{2}{5}S_{ABC} - \frac{1}{11} \times \frac{2}{5}S_{ABC} = \frac{2}{5} \times \frac{10}{11}S_{ABC} = \frac{4}{11}S_{ABC}$$

同様に $S_{ACD} : S_{ABC} = DC : BC = 3 : 5$ 、 $S_{PCD} : S_{ACD} = 1 : 11$ より

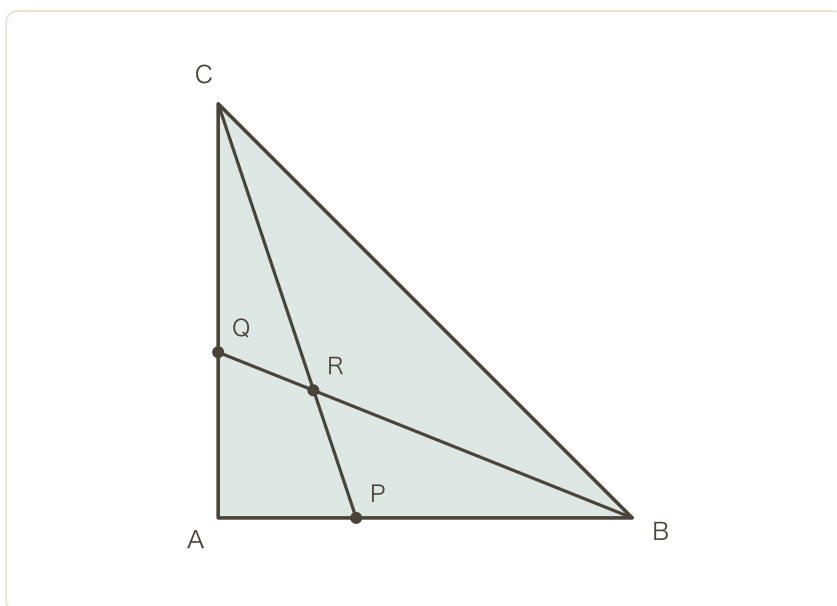
$$S_{CAP} = \frac{3}{5} \times \frac{10}{11}S_{ABC} = \frac{6}{11}S_{ABC}$$

$$S_{BCP} = S_{ABC} - S_{ABP} - S_{CAP} = \left(1 - \frac{4}{11} - \frac{6}{11}\right)S_{ABC} = \frac{1}{11}S_{ABC}$$

(実際 $S_{BCP} : S_{ABC} = PD : AD = 1 : 11$ と一致する)

$$S_{ABP} : S_{BCP} : S_{CAP} = 4 : 1 : 6$$

三角形ABCの辺ABを $1:2$ に内分する点P、辺ACを $2:3$ に内分する点Qを取る。
線分BQと線分CPの交点をRとすると、 $S_{PQR} : S_{ABC}$ を求めよ。



$$S_{PQR} : S_{ABC} = 4 : \underline{65}$$

三角形ABQ（頂点A, B, Q）を考える。直線CPR（Pは辺AB上、Rは辺BQ上、Cは辺QAの延長上——Qは辺AC上の点なのでAQCは一直線）はこの三角形を切る1本の直線になっている。メネラウスの定理より

$$\frac{AP}{PB} \times \frac{BR}{RQ} \times \frac{QC}{CA} = 1$$

$$AP : PB = 1 : 2 \text{ より } \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}。$$

$AQ : QC = 2 : 3$ より、Aから見るとQは2、Cは5（2 + 3）の位置。 QC （QからCまで）= 3、 CA （CからAまで、逆向きに全体）= 5 なので $\frac{QC}{CA} = \frac{3}{5}$ 。

$$\frac{1}{2} \times \frac{BR}{RQ} \times \frac{3}{5} = 1$$

$$\frac{3}{10} \times \frac{BR}{RQ} = 1$$

$$\frac{BR}{RQ} = \frac{10}{3} \quad \text{つまり } BR : RQ = 10 : 3$$

面積比の計算

$$S_{ABQ} : S_{ABC} = AQ : AC = 2 : 5$$

$$S_{APQ} : S_{ABQ} = AP : AB = 1 : 3 \text{ (共通の頂点Q、底辺AP対AB)}$$

$$S_{APQ} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} S_{ABC} = \frac{2}{15} S_{ABC}$$

$$S_{PBQ} : S_{ABQ} = PB : AB = 2 : 3$$

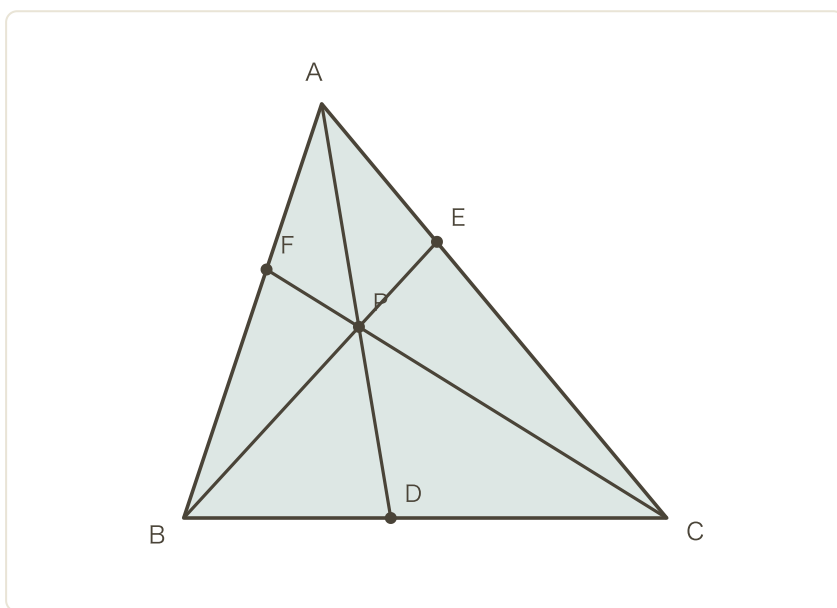
$$S_{PBQ} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} S_{ABC} = \frac{4}{15} S_{ABC}$$

三角形PBQの中で、RはBQ上で $BR : RQ = 10 : 3$ なので $S_{PRQ} : S_{PBQ} = RQ : BQ = 3 : 13$

$$S_{PQR} = \frac{3}{13} \times \frac{4}{15} S_{ABC} = \frac{12}{195} S_{ABC} = \frac{4}{65} S_{ABC}$$

$$S_{PQR} : S_{ABC} = 4 : 65$$

三角形ABCの辺BC上の点D、辺CA上の点E、辺AB上の点Fがあり、 $BD : DC = 3 : 4$ 、 $CE : EA = 2 : 1$ 、 $AF : FB = 2 : 3$ である。(1) チェバの定理の逆を用いて、3直線AD, BE, CFが1点Pで交わることを確かめよ ($\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB}$ の値を答えよ)。(2) 三角形BCEに、直線APD (Aは辺CEの延長上、Pは辺BEの延長上ではなく辺BE上、Dは辺BCの延長上ではなく辺BC上) についてメネラウスの定理を用いて、 $BP : PE$ を求めよ。



(1) 積の値 = 1 (2) $BP : PE = 9 : 4$

$$(1) \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2 \times 2}{4 \times 1 \times 3} = \frac{12}{12} = 1$$

積の値は1。チェバの定理の逆より、3直線AD, BE, CFは1点Pで交わる。

(2) 三角形BCE (頂点B, C, E) を考える。Eは辺CA上の点なので、辺CEを延長すると点Aに至る (C, E, Aは一直線上)。直線ADは、辺BC上の点D、辺EB上の点P、辺CEの延長上の点Aを通る1本の直線になっている。メネラウスの定理より

$$\frac{CA}{AE} \times \frac{EP}{PB} \times \frac{BD}{DC} = 1$$

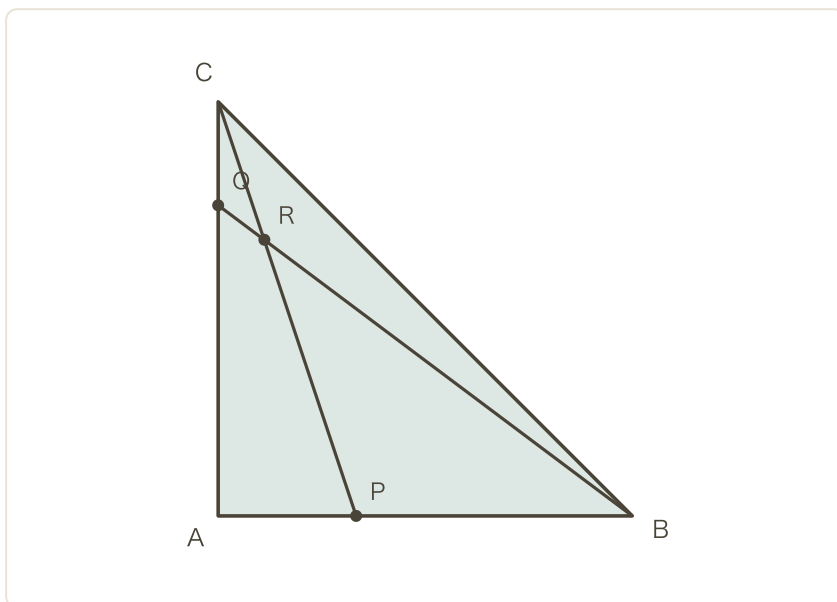
$CE : EA = 2 : 1$ より、Cから見てEは2、Aは3 (2 + 1) の位置。CA (CからAまで全体) = 3、AE (AからEまで) = 1 なので $\frac{CA}{AE} = 3$ 。

$BD : DC = 3 : 4$ より $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{4}$ 。

$$\begin{aligned}
 3 \times \frac{EP}{PB} \times \frac{3}{4} &= 1 \\
 \frac{9}{4} \times \frac{EP}{PB} &= 1 \\
 \frac{EP}{PB} &= \frac{4}{9} \quad \text{つまり } EP : PB = 4 : 9
 \end{aligned}$$

$$BP : PE = 9 : 4$$

三角形ABCの辺ABを $1:2$ に内分する点P、辺ACを $3:1$ に内分する点Qを取る。
線分BQと線分CPの交点をRとする。(1) $BR:RQ$ を求めよ。(2) $S_{RBC}:S_{ABC}$
を求めよ。



(1) $BR:RQ = 8:\underline{1}$ (2) $S_{RBC}:S_{ABC} = 2:\underline{9}$

(1) 三角形ABQ（頂点A, B, Q）を考える。直線CPR（Pは辺AB上、Rは辺BQ上、Cは辺QAの延長上）はこの三角形を切る1本の直線。メネラウスの定理より

$$\frac{AP}{PB} \times \frac{BR}{RQ} \times \frac{QC}{CA} = 1$$

$AP:PB = 1:2$ より $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$ 。

$AQ:QC = 3:1$ より、Aから見てQは3、Cは4（ $3+1$ ）の位置。 $QC = 1$ 、

$CA = 4$ なので $\frac{QC}{CA} = \frac{1}{4}$ 。

$$\frac{1}{2} \times \frac{BR}{RQ} \times \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{8} \times \frac{BR}{RQ} = 1$$

$$\frac{BR}{RQ} = 8$$

$$BR:RQ = 8:1$$

(2) $S_{QBC} : S_{ABC} = QC : CA$ ……ではなく、共通の頂点Bを持つ三角形QBCとABCで比べると $S_{QBC} : S_{ABC} = QC : AC = 1 : 4$ 。

三角形QBCの中で、RはBQ上で $BR : RQ = 8 : 1$ なので、共通の頂点Cを持つ三角形RBCとQBCで比べると $S_{RBC} : S_{QBC} = BR : BQ = 8 : 9$ 。

$$S_{RBC} = \frac{8}{9} \times \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{8}{36} S_{ABC} = \frac{2}{9} S_{ABC}$$

$$S_{RBC} : S_{ABC} = 2 : 9$$