

三角形の性質（二等分線・重心・内心・外心）

解答（全23問）

氏名 _____

得点 _____ / 23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

二等分線と比（内分）

三角形ABCで $AB = 6$, $AC = 9$, $BC = 10$ 。∠Aの二等分線がBCと交わる点をDとすると、BD, DCの長さを求めよ。

BD= 4 DC= 6

$$BD : DC = AB : AC = 6 : 9 = 2 : 3$$

$BC = 10$ を比2 : 3（和5）で分けると

$$BD = 10 \times \frac{2}{5} = 4, \quad DC = 10 \times \frac{3}{5} = 6$$

$$BD = 4, \quad DC = 6$$

2

二等分線と比（内分）

三角形ABCで $AB = 9$, $AC = 3$, $BC = 8$ 。∠Aの二等分線がBCと交わる点をDとすると、BD, DCの長さを求めよ。

$$BD = \underline{6} \quad DC = \underline{2}$$

$$BD : DC = AB : AC = 9 : 3 = 3 : 1$$

$BC = 8$ を比3 : 1（和4）で分けると

$$BD = 8 \times \frac{3}{4} = 6, \quad DC = 8 \times \frac{1}{4} = 2$$

$$BD = 6, \quad DC = 2$$

3

二等分線と比（比3:2）

三角形ABCで $AB = 12$, $AC = 8$, $BC = 15$ 。∠Aの二等分線がBCと交わる点をDとすると、BD, DCの長さを求めよ。

$$BD = \underline{9} \quad DC = \underline{6}$$

$$BD : DC = AB : AC = 12 : 8 = 3 : 2$$

$BC = 15$ を比3 : 2（和5）で分けると

$$BD = 15 \times \frac{3}{5} = 9, \quad DC = 15 \times \frac{2}{5} = 6$$

$$BD = 9, \quad DC = 6$$

4

重心の性質（2:1）

三角形ABCの重心をGとする。中線AMについて $AG = 6$ のとき、GMの長さを求めよ。

$$GM = \underline{3}$$

$$AG : GM = 2 : 1 \text{ なので } GM = AG \div 2$$

$$GM = 3$$

5

重心の性質 (2:1)

三角形ABCの重心をGとする。中線BNについて $GN = 7$ のとき、BGの長さを求めよ。

$$BG = \underline{14}$$

$$BG : GN = 2 : 1 \text{ なので } BG = GN \times 2$$

$$BG = 14$$

6

重心の性質・中線全体から求める

三角形ABCの重心をGとする。中線AM（頂点Aから辺BCの midpoint Mまで）の長さが 21 のとき、AG, GMの長さを求めよ。

$$AG = \underline{14} \quad GM = \underline{7}$$

$$AG : GM = 2 : 1 \text{ なので、中線全体を3等分すると1等分は } 21 \div 3 = 7.$$

$$AG = 14, GM = 7$$

7

二等分線と比 (分数になる場合)

三角形ABCで $AB = 7$, $AC = 5$, $BC = 9$ 。∠Aの二等分線がBCと交わる点をDとすると、BD, DCの長さを求めよ。

$$BD = \underline{21/4} \quad DC = \underline{15/4}$$

$$BD : DC = AB : AC = 7 : 5 \text{ (和12)}$$

$$BD = 9 \times \frac{7}{12} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}, \quad DC = 9 \times \frac{5}{12} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}$$

$$BD = \frac{21}{4} (= 5.25), \quad DC = \frac{15}{4} (= 3.75)$$

標準 (8~14)

8

二等分線と比の逆算

三角形ABCで、 $\angle A$ の二等分線がBCと交わる点をDとする。 $BD = 6$, $DC = 4$, $AB = 9$ のとき、ACの長さを求めよ。

$$AC = \underline{6}$$

$$BD : DC = AB : AC \text{ より } 6 : 4 = 9 : AC$$

$$\text{比を使って } AC = 4 \times \frac{9}{6} = 6$$

$$AC = 6$$

9

座標平面上に $A(3, 9)$, $B(0, 0)$, $C(6, 0)$ をとる。三角形ABCの重心Gの座標を求めよ。

$$x = \underline{3} \quad y = \underline{3}$$

重心の座標は3頂点の座標の平均。

$$x = \frac{3 + 0 + 6}{3} = 3, \quad y = \frac{9 + 0 + 0}{3} = 3$$

$$G(3, 3)$$

10 3辺が 6, 8, 10 の直角三角形の内接円の半径 r を求めよ。

$$r = \underline{2}$$

$$\text{直角三角形なので面積は } S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

$$\text{半周長 } s = \frac{6 + 8 + 10}{2} = 12$$

$$r = \frac{S}{s} = \frac{24}{12} = 2$$

- 11 3辺が 5, 12, 13 の直角三角形の内接円の半径 r を求めよ。

$$r = \underline{2}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30 \\ s &= \frac{5 + 12 + 13}{2} = 15 \\ r &= \frac{S}{s} = \frac{30}{15} = 2 \end{aligned}$$

- 12 3辺が 9, 12, 15 の直角三角形の外接円の半径 R を求めよ。

$$R = \underline{7.5}$$

直角三角形の外心は斜辺（最長辺）の中点。斜辺は15なので

$$R = \frac{15}{2} = 7.5$$

- 13 3辺が 5, 12, 13 の直角三角形の外接円の半径 R を求めよ。

$$R = \underline{6.5}$$

斜辺は13なので

$$R = \frac{13}{2} = 6.5$$

- 14 三角形ABCの重心をGとする。中線BN（頂点Bから辺CAの中点Nまで）の長さが 24 のとき、BG, GNの長さを求めよ。

$$BG = \underline{16} \quad GN = \underline{8}$$

$BG : GN = 2 : 1$ なので、24を3等分すると1等分は $24 \div 3 = 8$ 。

$$BG = 16, GN = 8$$

挑戦 (15~18)

15

外角の二等分線 (外分)

三角形ABCで $AB = 8$, $AC = 4$, $BC = 10$ 。∠Aの外角の二等分線が、辺BCの延長と交わる点をEとする (Eは辺BCの外側、C側の延長上にある)。CE, BEの長さを求めよ。

$$CE = \underline{10} \quad BE = \underline{20}$$

外角の二等分線でも比の形は同じ： $BE : CE = AB : AC = 8 : 4 = 2 : 1$ (ただし外分)。

Eは線分BCの外側 (C側の延長上) にあるので、 $BE = BC + CE$ の関係が成り立つ。

比2 : 1より $BE = 2CE$ 。これを $BE = BC + CE = 10 + CE$ に代入すると
 $2CE = 10 + CE \Rightarrow CE = 10$

$CE = 10$, $BE = 20$ (確認： $BE - CE = 20 - 10 = 10 = BC$ 、比も20 : 10 = 2 : 1で一致)

16

外接円の半径と正弦定理 (数I既習)

三角形ABCで $BC = 6$, $\angle A = 30^\circ$ 。この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

$$R = \underline{6}$$

$$\begin{aligned} \text{数Iの正弦定理：} \frac{BC}{\sin A} &= 2R \\ 2R &= \frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{1/2} = 12 \end{aligned}$$

$$R = 6$$

1辺の長さが6の正三角形について、外接円の半径 R と内接円の半径 r をそれぞれ求めよ。

$$R = \underline{2\sqrt{3}} \quad r = \underline{\sqrt{3}}$$

正三角形では、重心・内心・外心はすべて同じ点に重なる。1辺 a の正三角形の高さは

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a。$$

この三角形は高さ h を頂点から重心が2:1に内分するので、外心（頂点からの距離）は

$$R = \frac{2}{3}h、内心（底辺からの距離）は $r = \frac{1}{3}h。$$$

$$a = 6 \text{ のとき } h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

$$R = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}、r = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$R = 2\sqrt{3}$, $r = \sqrt{3}$ (つまり $R = 2r$ 。実はどんな三角形でも $R \geq 2r$ が成り立ち、正三角形は等号が成り立つ特別な場合)

三角形ABCで $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 40^\circ$ 。内心をIとすると、 $\angle BIC$ の大きさを求めよ。

$$\angle BIC = \underline{120} \text{ 度}$$

$$BI, CI \text{ はそれぞれ } \angle B, \angle C \text{ の二等分線なので、} \angle IBC = \frac{B}{2}, \angle ICB = \frac{C}{2}。$$

三角形BICの内角の和より

$$\angle BIC = 180^\circ - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = 180^\circ - \frac{B+C}{2}$$

$$\angle A = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ \text{ なので } B + C = 120^\circ$$

$$\angle BIC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$(\text{一般に } \angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2} \text{ という公式が成り立つ: } 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} = 120^\circ \text{ で一致})$$

$$\angle BIC = 120^\circ$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。二等分線の長さや複数の「心」を組み合わせた、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

角の二等分線の長さ

三角形ABCで $AB = 6$, $AC = 9$, $BC = 10$ 。∠Aの二等分線がBCと交わる点をDとすると、ADの長さを求めよ。

AD= $\sqrt{30}$

まず角の二等分線と比の定理からBD, DCを求める（練習問題1と同じ三角形）。

$$BD : DC = AB : AC = 6 : 9 = 2 : 3, \quad BD = 10 \times \frac{2}{5} = 4, \quad DC = 10 \times \frac{3}{5} = 6$$

二等分線の長さについては、次の公式が成り立つ（スチュワートの定理の特別な場合として証明できる）。

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

これに数値を代入すると

$$AD^2 = 6 \times 9 - 4 \times 6 = 54 - 24 = 30$$

$$AD = \sqrt{30}$$

応2

内心・重心の混合

座標平面上で、 $\angle B = 90^\circ$ 、 $AB = 6$ 、 $BC = 8$ 、 $CA = 10$ の直角三角形ABCを、 $B(0, 0)$ 、 $A(0, 6)$ 、 $C(8, 0)$ となるように置く。このとき、重心Gと内心Iの間の距離GIを求めよ。

GI= $\frac{2}{3}$

重心は3頂点の座標の平均： $G = \left(\frac{0+0+8}{3}, \frac{6+0+0}{3} \right) = \left(\frac{8}{3}, 2 \right)$

内心は、直角三角形で直角の頂点Bが原点・2辺が座標軸に沿っているとき、内接円の半径 r を使って $I = (r, r)$ と表せる（2辺の軸からの距離がどちらも r だから）。

$$r = \frac{AB + BC - CA}{2} = \frac{6 + 8 - 10}{2} = 2, \text{ よって } I = (2, 2)$$

GとIはどちらも $y = 2$ 上にあるので、距離は x 座標の差だけで求まる。

$$GI = \left| \frac{8}{3} - 2 \right| = \frac{2}{3}$$

$$GI = \frac{2}{3}$$

応3

外接円の半径と正弦定理（数I）

三角形ABCで $BC = 8$ 、 $\angle A = 45^\circ$ 、 $\angle B = 60^\circ$ 。この三角形の外接円の半径 R と、辺CAの長さを求めよ。

R= $4\sqrt{2}$ CA= $4\sqrt{6}$

数Iの正弦定理： $\frac{BC}{\sin A} = 2R$
 $2R = \frac{8}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$ 、よって $R = 4\sqrt{2}$

同じ $2R$ の値を使って、CA（=辺 b 、 $\angle B$ の対辺）を求める。

$$\frac{CA}{\sin B} = 2R = 8\sqrt{2}$$

$$CA = 8\sqrt{2} \times \sin 60^\circ = 8\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$$

$$R = 4\sqrt{2}, CA = 4\sqrt{6}$$

座標平面上で、 $\angle B = 90^\circ$ 、 $AB = 9$ 、 $BC = 12$ 、 $CA = 15$ の直角三角形ABCを、 $B(0, 0)$ 、 $A(0, 9)$ 、 $C(12, 0)$ となるように置く。外心O、重心G、垂心Hをそれぞれ求め、OGとGHの長さを求めよ。

OG= 2.5 GH= 5

外心Oは、直角三角形では斜辺CAの中点： $O = \left(\frac{0+12}{2}, \frac{9+0}{2} \right) = (6, 4.5)$

重心Gは3頂点の座標の平均： $G = \left(\frac{0+0+12}{3}, \frac{9+0+0}{3} \right) = (4, 3)$

垂心Hは、直角三角形では**直角の頂点そのもの**になる（ $\angle B$ の2辺がすでに互いに垂線の役目を果たしているため）： $H = B = (0, 0)$

OG：O(6, 4.5)からG(4, 3)まで、 $\sqrt{(-2)^2 + (-1.5)^2} = \sqrt{4 + 2.25} = \sqrt{6.25} = 2.5$

GH：G(4, 3)からH(0, 0)まで、 $\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

OG = 2.5, GH = 5（比はOG : GH = 1 : 2。O, G, Hがオイラー線上に並んでいることが数値でも確認できる）

三角形ABCの3辺が 7, 8, 9 であるとき、内接円の半径 r 、外接円の半径 R 、およびその比の値 $\frac{R}{r}$ を求めよ。

$$r = \underline{\sqrt{5}} \quad R = \underline{21\sqrt{5}/10} \quad \frac{R}{r} = \underline{21/10}$$

$$\text{半周長: } s = \frac{7+8+9}{2} = 12$$

$$\text{ヘロンの公式で面積: } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5}$$

$$\text{内接円の半径: } r = \frac{S}{s} = \frac{12\sqrt{5}}{12} = \sqrt{5}$$

外接円の半径は $R = \frac{abc}{4S}$ (正弦定理と面積公式を組み合わせる関係式) を使う。

$$R = \frac{7 \times 8 \times 9}{4 \times 12\sqrt{5}} = \frac{504}{48\sqrt{5}} = \frac{10.5}{\sqrt{5}} = \frac{10.5\sqrt{5}}{5} = 2.1\sqrt{5} = \frac{21\sqrt{5}}{10}$$

比は根号部分が約分されて消える:

$$\frac{R}{r} = \frac{2.1\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2.1 = \frac{21}{10}$$

$$r = \sqrt{5}, R = \frac{21\sqrt{5}}{10}, \frac{R}{r} = \frac{21}{10} \quad (R \geq 2r \text{ は常に成り立ち、等号は正三角形のときだけ})$$