

図形の性質 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ /27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

角の二等分線と比

三角形ABCで $AB = 10$, $AC = 15$, $BC = 20$ 。∠Aの二等分線がBCと交わる点をDとすると、BD, DCの長さを求めよ。

BD= 8 DC= 12

$$BD : DC = AB : AC = 10 : 15 = 2 : 3$$

$BC = 20$ をこの比2 : 3（和5）で分けると

$$BD = 20 \times \frac{2}{5} = 8, \quad DC = 20 \times \frac{3}{5} = 12$$

$$BD = 8, \quad DC = 12$$

2

重心の性質 (2:1)

三角形ABCの重心をGとする。中線AM（頂点Aから辺BCの midpoint Mまで）の長さが27のとき、AG, GMの長さを求めよ。

$$AG = \underline{18} \quad GM = \underline{9}$$

$AG : GM = 2 : 1$ なので、中線全体を3等分すると1等分は $27 \div 3 = 9$ 。

$$AG = 18, GM = 9$$

3

内接円の半径

3辺が9, 12, 15の直角三角形の内接円の半径 r を求めよ。

$$r = \underline{3}$$

$$\text{直角三角形なので面積は } S = \frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$$

$$\text{半周長は } s = \frac{9 + 12 + 15}{2} = 18$$

$$r = \frac{S}{s} = \frac{54}{18} = 3$$

4

外接円の半径

3辺が7, 24, 25の直角三角形の外接円の半径 R を求めよ。

$$R = \underline{12.5}$$

直角三角形の外心は斜辺（最長辺）の midpoint。斜辺は25なので

$$R = \frac{25}{2} = 12.5$$

5

チェバの定理

三角形ABCで、3直線AD, BE, CFが1点で交わっている。 $BD : DC = 5 : 4$ 、 $CE : EA = 3 : 2$ のとき、 $AF : FB$ を求めよ。

$$AF : FB = 8 : \underline{15}$$

$$\text{チェバの定理より } \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{15}{8} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{8}{15}$$

$$AF : FB = 8 : 15$$

6

メネラウスの定理

1本の直線が、辺BC上の点D、辺CA上の点Eを通り、辺ABの延長上の点Fを通っている。 $BD : DC = 2 : 5$ 、 $CE : EA = 3 : 1$ のとき、 $AF : FB$ を求めよ。

$$AF : FB = 5 : \underline{6}$$

$$\text{メネラウスの定理より } \frac{2}{5} \times \frac{3}{1} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{6}{5} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{5}{6}$$

$$AF : FB = 5 : 6$$

7

中心角→円周角

円Oにおいて、弧ABに対する中心角が 130° であるとき、弧ABに対する円周角 $\angle APB$ を求めよ。

$\angle APB =$ 65 度

円周角は中心角の半分。

$$\angle APB = 130^\circ \div 2 = 65^\circ$$

$$\angle APB = 65^\circ$$

8

内接四角形・対角の和

円に内接する四角形ABCDにおいて、 $\angle A = 110^\circ$ である。 $\angle C$ を求めよ。

$\angle C =$ 70 度

円に内接する四角形の対角の和は 180° 。

$$\angle C = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$\angle C = 70^\circ$$

9

接線の長さは等しい

円Oの外部の点Pから円に2本の接線を引き、接点をそれぞれA, Bとする。 $PA = 9$ のとき、 PB を求めよ。

PB= 9

円外の1点から引いた2本の接線の長さは等しい。

$$PB = 9$$

10

方べき・2弦（内部の点）

円の内部の点Pで2本の弦AB, CDが交わっている。 $PA = 5$, $PB = 8$, $PC = 4$ のとき、 PD を求めよ。

PD= 10

方べきの定理より $PA \times PB = PC \times PD$

$$5 \times 8 = 4 \times PD$$

$$40 = 4PD$$

$$PD = 10$$

$$PD = 10$$

11

方べき・接線と割線（外部の点）

円Oの外部の点Pから接線PT（Tは接点）と割線を引く。割線は円とA（近い方）、B（遠い方）で交わり、 $PA = 4$, $AB = 12$ である。 PT を求めよ。

PT= 8

$$PB = PA + AB = 4 + 12 = 16$$

方べきの定理より $PT^2 = PA \times PB$

$$PT^2 = 4 \times 16 = 64$$

$$PT = \sqrt{64} = 8$$

$$PT = 8$$

12

空間図形・平行な辺

立方体ABCD-EFGH（前面ABCD、後面EFGH、AE・BF・CG・DHが奥行きの辺）において、辺AEと平行な辺（辺AE自身は除く）は何本あるか。

本数 3

立方体の辺は3方向に4本ずつのグループに分かれる。奥行き方向（AEと同じ向き）の辺は、BF・CG・DHの3本。

3本

13

オイラーの多面体定理

ある凸多面体の頂点の数は $V = 10$ 、辺の数は $E = 15$ である。オイラーの多面体定理を使って、面の数 F を求めよ。

$F =$ 7

$$V - E + F = 2 \text{ より } 10 - 15 + F = 2$$

$$-5 + F = 2$$

$$F = 7$$

14

平面が決まる条件

空間内に、互いに平行な2本の直線がある。この2直線を含む平面はいくつあるか。

平面の個数 1 個

「互いに平行な2直線」は、平面が決まる条件の1つ。この条件を満たす平面は、ただ1つに決まる。

1個

15

外接円の半径

3辺が10, 24, 26の直角三角形の外接円の半径 R を求めよ。

$R =$ 13

直角三角形の外心は斜辺の中点。斜辺は26なので

$$R = \frac{26}{2} = 13$$

発展 (16~25)

16

重心+チェバの融合

三角形ABCの辺BCの中点をD、辺AB上の点をF ($AF : FB = 3 : 1$) とする。3直線AD, BE, CFが1点で交わるように辺CA上に点Eをとるとき、 $CE : EA$ を求めよ。

$CE : EA = 1 :$ 3

Dが中点なので $BD : DC = 1 : 1$ 。チェバの定理より

$$\frac{1}{1} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{3}{1} = 1$$

$$3 \times \frac{CE}{EA} = 1$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{1}{3}$$

$$CE : EA = 1 : 3$$

円の内部の点Pを通る2本の弦があり、一方は $PA = x$, $PB = x + 3$ 、他方は $PC = 6$, $PD = 9$ である。方べきの定理を用いて x の値を求めよ (x は正の実数とする)。

$$x = \underline{6}$$

方べきの定理より $PA \times PB = PC \times PD$

$$x(x + 3) = 6 \times 9$$

$$x^2 + 3x = 54$$

$$x^2 + 3x - 54 = 0$$

$$(x - 6)(x + 9) = 0$$

$$x = 6, -9$$

x は正の実数なので $x = -9$ は不適。

$$x = 6$$

円Oの外部の点Pから接線PT (Tは接点) と割線を引く。割線は円とA (近い方), B (遠い方) で交わり、 $AB = 5$, $PT = 6$ である。 $PA(= x)$ の値を求めよ (x は正の実数とする)。

$$x = \underline{4}$$

$PB = PA + AB = x + 5$ 。方べきの定理より $PT^2 = PA \times PB$

$$6^2 = x(x + 5)$$

$$36 = x^2 + 5x$$

$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$(x - 4)(x + 9) = 0$$

$$x = 4, -9$$

x は正の実数なので $x = -9$ は不適。

$$x = 4$$

正二十面体は頂点の数 $V = 12$ 、辺の数 $E = 30$ である。オイラーの多面体定理を用いて、面の数 F を求めよ。

$$F = \underline{20}$$

$$V - E + F = 2 \text{ より } 12 - 30 + F = 2$$

$$-18 + F = 2$$

$$F = 20$$

三角形ABCで $AB = 14$, $AC = 21$, $BC = 25$ 。∠Aの外角の二等分線が、辺BCの延長と交わる点をEとする（Eは辺BCの外側、B側の延長上にある）。BE, CEの長さを求めよ。

$$BE = \underline{50} \quad CE = \underline{75}$$

外角の二等分線でも比の形は同じ： $BE : CE = AB : AC = 14 : 21 = 2 : 3$ （ただし外分）。

Eは線分BCの外側（B側の延長上）にあるので、 $CE = CB + BE$ の関係が成り立つ。

比 $2 : 3$ より $CE = \frac{3}{2}BE$ 。これを $CE = CB + BE = 25 + BE$ に代入すると

$$\frac{3}{2}BE = 25 + BE$$

$$\frac{1}{2}BE = 25$$

$$BE = 50$$

$$CE = 25 + 50 = 75$$

$BE = 50$, $CE = 75$ （確認：比も $50 : 75 = 2 : 3$ で一致）

円に内接する四角形ABCDで対角線ACを引く。点Aにおける接線と辺ABのなす角（弧ABをはさむ側の角）が 35° 、 $\angle BCD = 95^\circ$ のとき、 $\angle ACD$ の大きさを求めよ。

$$\angle ACD = \underline{60} \text{ 度}$$

接弦定理より、点Aでの接線と辺ABのなす角は、反対側の弧（C, Dを含む側）に対する円周角に等しい。Cはその弧の上にあるので

$$\angle ACB = 35^\circ \text{（接線と弦ABのなす角に等しい）}$$

対角線ACは $\angle BCD$ を $\angle ACB$ と $\angle ACD$ に分けるので

$$\angle ACD = \angle BCD - \angle ACB = 95^\circ - 35^\circ = 60^\circ$$

$$\angle ACD = 60^\circ$$

三角形ABCで、 $\angle A$ の二等分線が辺BCと交わる点をDとする。 $AB = 9$, $AC = 15$ とする。辺CA上の点E（ $CE : EA = 2 : 1$ ）、辺AB上の点Fがあり、3直線AD, BE, CFが1点で交わっているとき、 $AF : FB$ を求めよ。

$$AF : FB = 5 : \underline{6}$$

まず角の二等分線と比の定理より $BD : DC = AB : AC = 9 : 15 = 3 : 5$ 。

次にチェバの定理を用いる。

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{1} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{6}{5} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = \frac{5}{6}$$

$$AF : FB = 5 : 6$$

1辺の長さが4の立方体がある。1つの頂点に集まる3本の辺の先（つまりその頂点に隣り合う3つの頂点）を通る平面で、立方体の角を切り落とす。切り口にできる三角形の1辺の長さを求めよ。

1辺の長さ $4\sqrt{2}$

切り落とす頂点をOとし、Oに隣り合う3つの頂点をP, Q, Rとする。OP, OQ, ORはすべて立方体の辺なので長さ4、かつ互いに垂直。

三角形OPQは直角三角形（ $\angle POQ = 90^\circ$ ）なので、三平方の定理より

$$PQ = \sqrt{OP^2 + OQ^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

QR, RPも同様の理由で同じ長さになるので、切り口PQRは正三角形。

切り口の正三角形の1辺の長さは $4\sqrt{2}$

三角形ABCの内心をIとする。 $\angle BIC = 142^\circ$ のとき、 $\angle A$ の大きさを求めよ。

$\angle A =$ 104 度

内心の性質より $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$ が成り立つ。

$$142^\circ = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

$$\frac{A}{2} = 52^\circ$$

$$\angle A = 104^\circ$$

円の外部の点Pから接線PTを引き、Tを接点とする。また、Pを通る割線が円とA, B (Aが近い方) で交わり、 $PA : AB = 2 : 3$ である。 $PT = 10$ のとき、 PA の長さを求めよ ($PA = x$ とおき、 x は正の実数とする)。

$$PA = \underline{2\sqrt{10}}$$

$$PA : AB = 2 : 3 \text{ なので } AB = \frac{3}{2}x, \quad PB = PA + AB = x + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}x。$$

$$\text{方べきの定理より } PT^2 = PA \times PB$$

$$10^2 = x \times \frac{5}{2}x$$

$$100 = \frac{5}{2}x^2$$

$$x^2 = 40$$

$$x = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad (x \text{ は正の実数なので } -2\sqrt{10} \text{ は不適})$$

$$PA = 2\sqrt{10}$$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1 「角の二等分線と比の定理」「チェバの定理」「メネラウスの定理」は、どれも三角形の辺を分ける点の比を扱っているが、それぞれ何が同じで何が違うのかを、図の中に出てくる「線の本数」や「関係する点の個数」に着目して説明せよ。

3つの定理はいずれも、三角形の辺（またはその延長）を分ける点の比を扱っている、という点で共通している。しかし、図の中に出てくる「線」の姿がそれぞれ異なる。

角の二等分線と比の定理は、頂点から対辺へ引かれた**1本の線分**（角の二等分線）だけを扱う、いちばん単純な場合である。この線分1本と対辺の交点の位置が、隣り合う2辺の比 $AB : AC$ だけで決まる、というシンプルな関係を述べている。

チェバの定理は、3つの頂点それぞれから対辺へ引かれた**3本の線分**が、三角形の内部の**1つの点**に集まっている場面を扱う。3本の線が「集まる」という条件のもとで、辺の分点の比の積が1になる、という関係である。

メネラウスの定理は、線分の本数としては見かけ上チェバと同じ式になるが、状況がまったく違う。図の中にあるのは3本の線分ではなく、三角形の3辺（の延長を含む）を切り抜けていく**1本の直線**だけである。この1本の直線が3辺と交わる3つの点について、比の積を計算すると同じく1になる。

このように、角の二等分線と比の定理は「線1本・比1つ」の基本形であり、チェバの定理とメネラウスの定理はどちらも「3つの分点の比の積が1になる」という同じ式の形をしているが、その式が成り立つ理由となる図形の状況（3本の線が1点に集まっているか、1本の直線が3辺を横切っているか）がまったく異なる。だからこそ、図を見たときにどちらの状況なのかをまず見極めることが、2つの定理を使い分けるうえで欠かせない。

角の二等分線と比の定理は線1本を扱う基本形。チェバの定理とメネラウスの定理は式の形こそ同じだが、前者は3本の線が1点に集まる場面、後者は1本の直線が3辺を横切る場面を表しており、図の状況が根本的に異なる。

記2 この章は、三角形の性質（1ページ）から始まり、比の定理（2ページ）、円の性質（3ページ）、そして作図・空間図形（4ページ）へと話題が進んでいく。一見バラバラに見えるこの4つのテーマに共通する、図形の性質を調べるときの基本的な考え方を、具体例を1つ挙げながら説明せよ。

この章で扱う4つのテーマは、題材こそ三角形・比の定理・円・空間図形とさまざまだが、共通しているのは「図形の中にある不変の関係を、すでにわかっている性質を根拠として積み重ねながら導き出す」という考え方である。答えを直接測るのではなく、定義や既に証明された性質から出発して、論理的に次の性質を導く、という姿勢が一貫している。

たとえば1ページの「直角三角形の外心は斜辺の midpoint になる」という性質は、外心の定義（3頂点までの距離が等しい点）だけから、座標を使って3頂点までの距離を実際に計算し、それが等しくなることを確かめることで導かれた。天下りの「そういうものだ」と覚えるのではなく、定義に立ち返って根拠を示す、という手順を踏んでいる。

同じ考え方は3ページの接弦定理や方べきの定理にも表れている。接線と弦がつくる角がなぜ反対側の円周角に等しくなるのか、方べきの定理の3つの型がなぜ同じ式で表せるのかは、いずれも円周角の定理や相似という、すでに学んだ性質を土台にして組み立てられている。4ページの作図でも、垂直二等分線・角の二等分線・垂線という一見別々に見える3つの作図が、実は「2点から等距離にある点を2つ見つけて結ぶ」という同じ原理から生まれていることが紹介されている。

つまり、この章を通して身につけるべき力は、個々の公式を覚えることそのものではなく、「なぜそう言えるのか」を、より基本的な性質にさかのぼって説明できるようになることである。この論証の感覚は、数学Iの正弦定理・余弦定理や、次の章「整数の性質」で整数の性質を絞り込んでいく考え方にも共通して生きてくる。

この章に共通するのは、答えを直接測るのではなく、定義やすでに証明された性質を根拠として論理的に次の性質を導く、という考え方である。直角三角形の外心が斜辺の midpoint になることを外心の定義から座標計算で確かめた例が、その典型である。

EXAM

共通テスト形式チャレンジ（大問1）

目標時間 8分／配点 20点

花子さんの住む町の公園には円形の池がある。花子さんと太郎さんは、池の外側の点Pから2本のまっすぐな道を引いて、円の性質を使って池に関する長さを求めようとしている。

先生「1本目の道はPから池に入る点をA、出る点をBとし、 $PA = 8\text{m}$ 、 $AB = 10\text{m}$ とする。2本目の道はPから入る点をC、出る点をDとし、 $PC = 9\text{m}$ とする。」
花子「方べきの定理を使えば、道の長さから池の中の距離もわかりそうですね。」

- (1) まず PB の長さを求めよ。 $PB = PA + AB = \boxed{\text{ア}}\boxed{\text{イ}}\text{m}$ である。次に方べきの定理 $PA \times PB = PC \times PD$ を用いて、 PD の長さを求めよ。 $PD = \boxed{\text{ウ}}\boxed{\text{エ}}\text{m}$ である。

アイ 18 ウエ 16

$$PB = PA + AB = 8 + 10 = 18 \text{ (m)}$$

方べきの定理 $PA \times PB = PC \times PD$ より

$$8 \times 18 = 9 \times PD$$

$$144 = 9PD$$

$$PD = 16 \text{ (m)}$$

$$PB = 18\text{m}, PD = 16\text{m}$$

- (2) 太郎「池にはもう1本、点Pから接するように引ける道があるはずです。」 点Pから池に引いた接線をPT（Tは接点）とする。 $PT^2 = PA \times PB = \boxed{\text{オ}}\boxed{\text{カ}}\boxed{\text{キ}}$ なので、 $PT = \boxed{\text{ク}}\boxed{\text{ケ}}\text{m}$ である。

方べきの定理（接線と割線の型）より

$$PT^2 = PA \times PB = 8 \times 18 = 144$$

$$PT = \sqrt{144} = 12 \text{ (m)}$$

$$PT = 12\text{m}$$

(3)

花子「接点Tのところで、道PTと池の縁に沿って引いた弦TAがつくる角を測ったら 35° でした。」この角（点Pの側にある弧TAをはさむ角）を接弦定理に使うと、反対側の円周角 $\angle TXA$ （Xは弧の反対側の円周上の点）はコサ度である。さらにこの弧TAに対する中心角はシス度である。

コサ 35 シス 70

接弦定理より、接線PTと弦TAがつくる角は、反対側の弧に対する円周角に等しい。

$$\angle TXA = 35^\circ$$

円周角は中心角の半分なので、中心角はその2倍。

$$\text{中心角} = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$$

$$\text{円周角} = 35^\circ, \text{中心角} = 70^\circ$$

EXAM

共通テスト形式チャレンジ（大問2）

目標時間 8分／配点 20点

花子さんのクラスは、文化祭で三角形の形をした案内看板を作ることになった。看板を支える支柱の位置を、角の二等分線やチェバの定理・メネラウスの定理を使って決めることにした。

先生「看板の三角形の辺の長さは、 $AB = 16$, $AC = 24$, $BC = 30$ とする。頂点Aから角の二等分線を引いて、辺BCと交わる点をDとしよう。」

- (1) 角の二等分線と比の定理を用いて、BD, DCの長さを求めよ。 $BD =$ ア イ、 $DC =$ ウ エである。

アイ 12 ウエ 18

$$BD : DC = AB : AC = 16 : 24 = 2 : 3$$

$BC = 30$ をこの比2 : 3（和5）で分けると

$$BD = 30 \times \frac{2}{5} = 12$$

$$DC = 30 \times \frac{3}{5} = 18$$

$$BD = 12, DC = 18$$

- (2) 太郎「支柱をもう1本、辺AB上の点Fに立てて、直線AD, CFと辺CA上の点Eを結んだ直線BEが1点で交わるようにしたいです。」先生「辺CA上の点Eを $CE : EA = 3 : 4$ となるようにとろう。」チェバの定理を用いて、 $AF : FB$ を求めよ。 $AF : FB =$ オ : カである。

オ 2 カ 1

チェバの定理より

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{12}{18} \times \frac{3}{4} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{AF}{FB} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} = 2$$

$$AF : FB = 2 : 1$$

(3)

3直線AD, BE, CFの交点をPとする。三角形ABDに、直線CPF (Fは辺AB上、Pは辺AD上、Cは辺BDの延長上) についてメネラウスの定理を用いると、 $AP : PD = \boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}} : \boxed{\text{ケ}}$ である。

キ 10 ケ 3

三角形ABD (頂点A, B, D) を考える。直線CF (Cは辺BDの延長上、Pは辺AD上、Fは辺AB上) はこの三角形を切る1本の直線になっている。メネラウスの定理より

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BC}{CD} \times \frac{DP}{PA} = 1$$

$AF : FB = 2 : 1$ より $\frac{AF}{FB} = 2$ 。

$BD : DC = 12 : 18$ より $BC = BD + DC = 30$ (全体)、 $CD = 18$ (部分)

なので $\frac{BC}{CD} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$ 。

$$2 \times \frac{5}{3} \times \frac{DP}{PA} = 1$$

$$\frac{10}{3} \times \frac{DP}{PA} = 1$$

$$\frac{DP}{PA} = \frac{3}{10}$$

$$AP : PD = 10 : 3$$