

条件付き確率

解答（全21問）

氏名 _____

得点 /21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～6）

1

表から条件付き確率を読む

ある学年36人に、運動部に所属しているか（A）／文化部に所属しているか（ $\bar{A}$ ）と、兄弟がいるか（B）／いないか（ $\bar{B}$ ）を調べたところ、次の表のようになった。

	兄弟あり（B）	兄弟なし（ $\bar{B}$ ）	計
運動部（A）	14	6	20
文化部（ $\bar{A}$ ）	4	12	16
計	18	18	36

運動部の生徒の中から1人選ぶとき、その生徒に兄弟がいる確率 $P_A(B)$ を求めよ。

確率 7/10

Aである（運動部）人は $n(A) = 20$ 。そのうち兄弟がいる（B）人は $n(A \cap B) = 14$ 。

$$P_A(B) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

2

同じ表・別の条件

問題1の表を使う。文化部の生徒の中から1人選ぶとき、その生徒に兄弟がいる確率 $P_{\bar{A}}(B)$ を求めよ。

確率 $\frac{1}{4}$

文化部 ($\bar{A}$) は $n(\bar{A}) = 16$ 。そのうち兄弟がいる人は $n(\bar{A} \cap B) = 4$ 。

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

3

条件付き確率と積事象の違い

問題1の表を使う。学年36人の中からランダムに1人選ぶとき、その生徒が運動部に所属していて、かつ兄弟がいる確率 $P(A \cap B)$ を求めよ。

確率 $\frac{7}{18}$

今度は36人全体が母集団（問題1・2のような「～の中から」という絞り込みがない）。運動部かつ兄弟ありは $n(A \cap B) = 14$ 。

$$P(A \cap B) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

4

定義式に当てはめる

$P(A) = 0.4$ 、 $P(A \cap B) = 0.12$ のとき、条件付き確率 $P_A(B)$ を求めよ。

確率 $\frac{3}{10}$

定義式 $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ にそのまま代入する。

$$P_A(B) = \frac{0.12}{0.4} = 0.3$$

$$P_A(B) = \frac{3}{10}$$

5

乗法定理を使う

$P(A) = \frac{1}{2}$ 、 $P_A(B) = \frac{2}{5}$ のとき、 $P(A \cap B)$ を求めよ。

確率 $\frac{1}{5}$

乗法定理 $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ を使う。

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

6

くじ・条件付き確率を直接考える

当たりくじ2本、はずれくじ8本の合計10本の中から、順に2本を続けて引く（戻さない）。1本目が当たりだったとき、2本目も当たりを引く条件付き確率を求めよ。

確率 $\frac{1}{9}$

1本目に当たりを引いた後、残り9本の中には当たりが $2 - 1 = 1$ 本しか残っていない。

$$P_A(B) = \frac{1}{9}$$

標準 (7~12)

7

赤玉4個、白玉2個の合計6個が入った袋から、続けて2個を順に取り出す（戻さない）。1個目が赤玉だったとき、2個目も赤玉である確率を求めよ。

確率 $\frac{3}{5}$

1個目に赤玉を取り出した後、残り5個の内訳は赤玉3個・白玉2個。

$$P_A(B) = \frac{3}{5}$$

問題7と同じ袋（赤玉4個、白玉2個）から続けて2個を順に取り出すとき、1個目・2個目とも赤玉である確率を求めよ。

確率 $\frac{2}{5}$

$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 、問題7より $P_A(B) = \frac{3}{5}$ 。乗法定理より

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

当たりくじ2本、はずれくじ8本の合計10本のくじから順に2本引くとき、2本目が当たりである確率を求めよ。

確率 $\frac{1}{5}$

「1本目当たり・2本目当たり」と「1本目はずれ・2本目当たり」の2通りに分けて足す。

$$(i) \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{90} \quad (ii) \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{90}$$

合計 $\frac{2}{90} + \frac{16}{90} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$ 。これは $P(1本目が当たり) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ と同じ値になる。

$$P(2本目が当たり) = \frac{1}{5}$$

10

トランプ・条件付き確率

52枚のトランプから1枚引いたところ、それはハートだった。この1枚が絵札（J、Q、K）である確率を求めよ。

確率 3/13

「ハートだった」とわかった時点で、考える母集団はハート13枚だけに絞られる。そのうち絵札（J、Q、Kのハート）は3枚。

$$P = \frac{3}{13}$$

11

乗法定理を逆に使う

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ 、 $P_A(B) = \frac{1}{3}$ のとき、 $P(A)$ を求めよ。

確率 1/2

乗法定理 $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ を $P(A)$ について解く。

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P_A(B)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

ある学年40人に音楽部に所属しているか (A) / していないか ($\bar{A}$) と、聴力テストに合格したか (B) / 不合格だったか ($\bar{B}$) を調べたところ、次の表のようになった。

	合格 (B)	不合格 ($\bar{B}$)	計
音楽部 (A)	12	3	15
非所属 ($\bar{A}$)	10	15	25
計	22	18	40

音楽部の生徒の中から1人選ぶとき、その生徒が聴力テストに合格している確率 $P_A(B)$ を求めよ。

確率 4/5

音楽部 (A) は $n(A) = 15$ 。そのうち合格 (B) は $n(A \cap B) = 12$ 。

$$P_A(B) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

挑戦 (13~16)

13

原因の確率・割合から表を作る

ある工場では、製品を機械Aと機械Bの2台で作っている。全製品のうち機械Aが60%、機械Bが40%を生産している。機械Aで作った製品の不良品率は2%、機械Bで作った製品の不良品率は5%である。この工場の製品からランダムに1個選んだところ不良品だった。この製品が機械Aで作られたものである確率を求めよ。(製品1000個として表を作って考えるとよい)

確率 3/8

製品を1000個として考える。機械A： $1000 \times 0.6 = 600$ 個、機械B： $1000 \times 0.4 = 400$ 個。

機械Aの不良品： $600 \times 0.02 = 12$ 個。機械Bの不良品： $400 \times 0.05 = 20$ 個。

不良品の合計は $12 + 20 = 32$ 個。

$$P(\text{機械A} \mid \text{不良品}) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

14

3回連続で引く・条件付き確率

当たりくじ3本、はずれくじ7本の合計10本の中から、続けて3本を順に引く（戻さない）。1本目・2本目がともに当たりだったとき、3本目も当たりを引く確率を求めよ。

確率 1/8

1本目・2本目で当たりを2本引いた後、残り8本の中には当たりが $3 - 2 = 1$ 本しか残っていない。

$$P = \frac{1}{8}$$

問題14と同じくじ（当たり3本、はずれ7本、合計10本）から続けて3本を順に引くとき、1本目・2本目・3本目のすべてが当たりである確率を求めよ。

確率 1/120

乗法定理を2回繰り返して使う（3つの事象がすべて起こる確率＝各段階の条件付き確率の積）。

1本目が当たり： $\frac{3}{10}$

2本目も当たり（1本目当たりの後、残り9本中当たり2本）： $\frac{2}{9}$

3本目も当たり（2本引いた後、残り8本中当たり1本）： $\frac{1}{8}$

$$P = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{6}{720}$$

$$P = \frac{1}{120}$$

あるウイルスの検査を考える。感染している人（A）は全体の5%、感染していない人（ $\bar{A}$ ）は95%である。感染している人が検査で陽性（B）となる確率（感度）は96%、感染していない人が誤って陽性となってしまう確率（偽陽性率）は8%である。検査を受けた人が陽性だったとき、その人が実際に感染している確率を求めよ。（1000人として表を作って考えるとよい）

確率 12/31

1000人として考える。感染（A）： $1000 \times 0.05 = 50$ 人、非感染（ $\bar{A}$ ）：950人。

感染者のうち陽性： $50 \times 0.96 = 48$ 人。非感染者のうち誤って陽性： $950 \times 0.08 = 76$ 人。

陽性の合計は $48 + 76 = 124$ 人。

$$P_B(A) = \frac{48}{124} = \frac{12}{31}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。検査の的中率・3つの箱・乗法定理の連鎖など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

表を与えて計算・偽陰性

ある検査を受けた500人について、感染しているか（A）／していないか（ $\bar{A}$ ）と、検査結果が陽性か（B）／陰性か（ $\bar{B}$ ）を調べたところ、次の表のようになった。検査結果が陰性だった人の中で、実は感染していた（見落とされていた）確率を求めよ。

	陽性（B）	陰性（ $\bar{B}$ ）	計
感染（A）	35	5	40
非感染（ $\bar{A}$ ）	420	40	460
計	455	45	500

確率 1/9

「陰性だった」とわかったので、母集団は陰性の45人だけに絞られる。そのうち実は感染しているのは表より5人。

$$P_{\bar{B}}(A) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

あるウイルスの有病率（感染している人の割合）は1%である。検査の感度（感染者が正しく陽性となる確率）は90%、偽陽性率（非感染者が誤って陽性となる確率）は10%である。この検査で陽性と判定された人が、実際に感染している確率を求めよ。（1000人として表を作って考えるとよい）

確率 1/12

1000人で考える。感染（A）： $1000 \times 0.01 = 10$ 人、非感染：990人。

感染者のうち陽性： $10 \times 0.9 = 9$ 人。非感染者のうち誤って陽性： $990 \times 0.1 = 99$ 人。

陽性の合計は $9 + 99 = 108$ 人。

$$P_B(A) = \frac{9}{108} = \frac{1}{12}$$

検査そのものの性能（感度90%）はそれほど悪くないのに、的中率は約8%しかない。これは、そもそも感染している人（10人）が非感染の人（990人）に比べてずっと少ないため、陽性者108人の中に誤って陽性になった非感染者99人が大量に紛れ込んでしまうからである。**まれにしか起こらない事柄について「原因の確率」を考えるときは、割合の大きさに惑わされず、必ず実際の人数（表）で確認することが大切。**

$$P_B(A) = \frac{1}{12}$$

箱A、箱B、箱Cがあり、どの箱を選ぶ確率も同じ $\frac{1}{3}$ とする。箱Aには赤玉2個・白玉3個（計5個）、箱Bには赤玉4個・白玉1個（計5個）、箱Cには赤玉1個・白玉4個（計5個）が入っている。3つの箱から1つをランダムに選び、その箱から玉を1個取り出したところ赤玉だった。この赤玉が箱Aから取り出された確率を求めよ。

確率 2/7

箱ごとに「その箱を選び、かつ赤玉を取り出す」確率を乗法定理で求める。

$$\text{箱A: } P(A) \times P_A(\text{赤}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\text{箱B: } \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

$$\text{箱C: } \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

赤玉が出る確率の合計（3つの場合を合わせる、排反なので足し算でよい）

$$P(\text{赤}) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$$

「赤玉だった」という結果がわかったので、母集団は赤玉が出た7/15（の重み）だけに絞られる。箱Aから赤玉が出た割合はそのうちの2/15分。

$$P(\text{箱A} \mid \text{赤}) = \frac{2/15}{7/15} = \frac{2}{7}$$

応4

乗法定理の連鎖（3種類の玉）

赤玉4個、白玉3個、青玉3個の合計10個が入った袋から、玉を1個ずつ戻さずに続けて3個取り出す。1個目が赤玉、2個目が白玉、3個目が赤玉である確率を求めよ。

確率 1/20

乗法定理を2回使って3段階をつなげる。

$$1\text{個目が赤玉} : \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$2\text{個目が白玉（赤玉が1個減り、残り9個は赤3・白3・青3）} : \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$3\text{個目が赤玉（さらに白玉も1個減り、残り8個は赤3・白2・青3）} : \frac{3}{8}$$

$$P = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{120}$$

$$P = \frac{1}{20}$$

応5

連続する条件付き確率

当たりくじ4本、はずれくじ6本の合計10本の中から、続けて4本を順に引く（戻さない）。1本目・2本目・3本目がすべて当たりだったとき、4本目も当たりを引く確率を求めよ。

確率 1/7

1本目から3本目まで当たりを3本引いた後、残り7本の中には当たりが $4 - 3 = 1$ 本しか残っていない。全部を計算し直す必要はなく、その時点で残っている本数だけを数えればよい。

$$P = \frac{1}{7}$$