

関数の連続性

解答（全19問）

氏名 _____

得点 _____ / 19点

DRILL

練習問題（全14問）

基本（1～6）

1

分子を因数分解

次の関数が $x = 2$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & (x \neq 2) \\ a & (x = 2) \end{cases}$$

$a =$ 4

$$x \neq 2 \text{ のとき } f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2。$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4。$$

$$a = 4$$

2

分子を因数分解

次の関数が $x = 2$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & (x \neq 2) \\ a & (x = 2) \end{cases}$$

$$a = \underline{-1}$$

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ より $x \neq 2$ のとき $f(x) = x - 3$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = -1。$$

$$a = -1$$

3

3次式の因数分解

次の関数が $x = 2$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & (x \neq 2) \\ a & (x = 2) \end{cases}$$

$$a = \underline{12}$$

$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ より $x \neq 2$ のとき $f(x) = x^2 + 2x + 4$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 4 + 4 + 4 = 12。$$

$$a = 12$$

4

区分的定義：境界での一致条件

次の関数が $x = 1$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & (x \leq 1) \\ x^2 + 3 & (x > 1) \end{cases}$$

$$a = \underline{2}$$

$x \leq 1$ の式から $f(1) = 2 + a$ 。

右側の極限は $\lim_{x \rightarrow 1+0} (x^2 + 3) = 1 + 3 = 4$ 。

一致させると $2 + a = 4$ 。

$$a = 2$$

5

区分的定義：境界での一致条件

次の関数が $x = 0$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & (x < 0) \\ 3x + 2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$a = \underline{-2}$$

$x \geq 0$ の式から $f(0) = 3(0) + 2 = 2$ 。

左側の極限は $\lim_{x \rightarrow 0-0} (x^2 - a) = -a$ 。

一致させると $-a = 2$ 。

$$a = -2$$

次の関数が $x = 0$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

$$a = \underline{1/4}$$

分子分母に $\sqrt{x+4}+2$ をかけて有理化する。

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}。$$

$$a = \frac{1}{4}$$

標準 (7~11)

次の関数が $x = -1$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & (x \leq -1) \\ -x^2 & (x > -1) \end{cases}$$

$$a = \underline{0}$$

$x \leq -1$ の式から $f(-1) = 1 - 2 + a = a - 1$ 。

右側の極限は $\lim_{x \rightarrow -1+0} (-x^2) = -1$ 。

一致させると $a - 1 = -1$ 。

$$a = 0$$

次の関数が $x = 9$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} & (x \neq 9) \\ a & (x = 9) \end{cases}$$

$$a = \underline{1/6}$$

分子分母に $\sqrt{x} + 3$ をかけて有理化する。

$$\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}。$$

$$a = \frac{1}{6}$$

中間値の定理を用いて、方程式 $x^3 - x - 1 = 0$ が区間 $[1, 2]$ に実数解をもつと言えるか。言えるなら「ある」、言えないなら「ない」と答えよ。

答え ある

$f(x) = x^3 - x - 1$ とおくと整式なので連続。

$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$ 、 $f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0$ 。異符号。

中間値の定理により、区間 $[1,2]$ に解があると言える → ある

- 10 中間値の定理を用いて、方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ が区間 $[0, 1]$ に実数解をもつと言えるか。言えるなら「ある」、言えないなら「ない」と答えよ。

答え ある

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ とおくと整式なので連続。
 $f(0) = 1 > 0$ 、 $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$ 。異符号。

中間値の定理により、区間 $[0,1]$ に解があると言える → ある

- 11 中間値の定理を用いて、方程式 $x^2 - 2 = 0$ が区間 $[2, 3]$ に実数解をもつと言えるか。言えるなら「ある」、言えないなら「ない」と答えよ。

答え ない

$f(x) = x^2 - 2$ とおくと整式なので連続。
 $f(2) = 4 - 2 = 2 > 0$ 、 $f(3) = 9 - 2 = 7 > 0$ 。どちらも正で同符号。

中間値の定理からはこの区間に解があるとは言えない → ない

挑戦 (12~14)

- 12 三角関数との組み合わせ

中間値の定理を用いて、方程式 $\cos x - x = 0$ が区間 $[0, 1]$ に実数解をもつと言えるか。言えるなら「ある」、言えないなら「ない」と答えよ。

答え ある

$f(x) = \cos x - x$ とおくと、 $\cos x$ も x も連続な関数なので $f(x)$ も連続。
 $f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$ 。
 $f(1) = \cos 1 - 1$ は、 $x = 1 (\neq 0)$ のとき $\cos x < 1$ がつねに成り立つので $f(1) < 0$ 。異符号。

中間値の定理により、区間 $[0,1]$ に解があると言える → ある

- 13 中間値の定理を用いて、方程式 $x^3 + x + 1 = 0$ が区間 $[-2, -1]$ に実数解をもつと言えるか。言えるなら「ある」、言えないなら「ない」と答えよ。

答え ない

$f(x) = x^3 + x + 1$ とおくと整式なので連続。

$f(-2) = -8 - 2 + 1 = -9 < 0$ 、 $f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1 < 0$ 。どちらも負で同符号。

中間値の定理からはこの区間に解があるとは言えない → ない

14

4次式

- 中間値の定理を用いて、方程式 $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ が区間 $[2, 3]$ に実数解をもつと言えるか。言えるなら「ある」、言えないなら「ない」と答えよ。

答え ない

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ とおくと整式なので連続。

$f(2) = 16 - 16 + 1 = 1 > 0$ 、 $f(3) = 81 - 36 + 1 = 46 > 0$ 。どちらも正で同符号。

中間値の定理からこの区間に解があるとは言えない → ない

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。解の存在区間の特定や、 e の定義を使った極限計算に挑戦しよう。

応1

解の存在区間を特定する

方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ は正の実数解を1つもつ。中間値の定理を使って、その解が整数 n を用いた区間 $n < x < n + 1$ の中にあることを示し、 n の値を求めよ。

$n =$ 1

$f(x) = x^3 - 3x - 1$ とおくと整式なので連続。整数を順に代入して符号を調べる。

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - 3 - 1 = -3 < 0$$

$$f(2) = 8 - 6 - 1 = 1 > 0$$

$f(1)$ と $f(2)$ が異符号なので、中間値の定理により $f(c) = 0$ となる c が $(1, 2)$ に存在する。これが正の実数解。

$n = 1$ （解は区間 $1 < x < 2$ にある）

応2

eの定義に関わる証明（記述式）

方程式 $e^{-x} = x$ は $0 < x < 1$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつことを、中間値の定理を用いて示せ。

$f(x) = e^{-x} - x$ とおく。 e^{-x} も x も連続な関数だから $f(x)$ は実数全体で連続、とくに $[0, 1]$ で連続。

$$f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$$

$$f(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1. \quad e = 2.71828 \dots > 1 \text{ より } \frac{1}{e} < 1 \text{ だから } f(1) < 0.$$

$f(0)$ と $f(1)$ は異符号だから、中間値の定理により $f(c) = 0$ となる実数 c が開区間 $(0, 1)$ に少なくとも1つ存在する。

よって、方程式 $e^{-x} = x$ は $0 < x < 1$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつ。

応3

eの定義を使った極限計算

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$ を e を用いて表せ。

答え e^3

指数 $3n$ を、もとの定義に合わせて $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^3$ の形に分解する。

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^3$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = e^3$$

応4

eの定義を使った極限計算（負の場合）

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ を e を用いて表せ。

答え $1/e$

$k = -1$ の場合として、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$ をそのまま使う（STEP4の「覚えておくと便利」のとおり、 k は負でもよい）。

$m = -n$ （つまり $n = -m$ ）とおくと $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow -\infty$ で、

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-m} = \left\{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right\}^{-1} \rightarrow e^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

応5

数値表を使った評価

STEP4の数値表から $2.7 < e < 2.72$ が読み取れる。これを用いて、 e^2 の整数部分を求めよ。

整数部分 7

$2.7 < e < 2.72$ の各辺を2乗する（各辺とも正の数なので、2乗しても大小関係は変わらない）。

$$2.7^2 < e^2 < 2.72^2$$

$$7.29 < e^2 < 7.3984$$

よって e^2 は 7.29 より大きく 7.4 より小さいので、整数部分は 7 。（実際 $e^2 = 7.389\dots$ ）

e^2 の整数部分は 7

