

関数の極限

解答（全23問）

氏名 _____

得点 /23点

DRILL

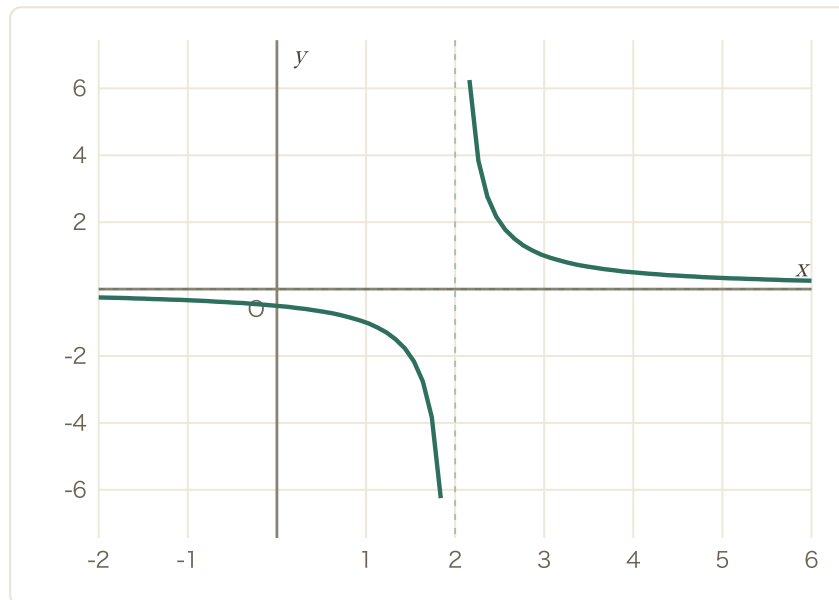
練習問題（全18問）

基本（1～8）

1

片側極限（グラフ読み取り）

$f(x) = \frac{1}{x-2}$ について、次の片側極限を求めよ。



$x=2$ の左右での符号の変化に注目。

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \underline{\text{inf}} \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \underline{-\text{inf}}$$

$x \rightarrow 2+0$ （ x が2よりわずかに大きい）のとき、 $x-2$ は正の側から0に近づくので $\frac{1}{x-2}$ はいくらでも大きくなる。

$x \rightarrow 2-0$ （ x が2よりわずかに小さい）のとき、 $x-2$ は負の側から0に近づくので $\frac{1}{x-2}$ はいくらでも小さく（負に大きく）なる。

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty$$

2

約分

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ を求めよ。

極限值 6

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 3 + 3 = 6$$

3

約分

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ を求めよ。

極限值 -4

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -2 - 2 = -4$$

4

約分

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ を求めよ。

極限值 1

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 2} = x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 2 - 1 = 1$$

5

sinの基本公式

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ を求めよ。

極限值 2

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \rightarrow 2 \times 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

6

 $x \rightarrow \infty$ ・同次数

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 5}{2x - 1}$ を求めよ。

極限值 2

分母の最高次の項 x で割ると $\frac{4 + \frac{5}{x}}{2 - \frac{1}{x}} \rightarrow \frac{4}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 5}{2x - 1} = 2$$

7

 $x \rightarrow \infty$ ・分子の次数が低い

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x^2 + 1}$ を求めよ。

極限值 0

分母の次数（2次）が分子の次数（1次）より高いので、分母の最高次 x^2 で割ると分子は 0 に近づく。

$$\frac{x + 3}{x^2 + 1} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{0}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x^2 + 1} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{x+4}$ を求めよ。

極限值 3

$x \rightarrow -\infty$ でも考え方は同じ。分母の最高次 x で割ると $\frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{4}{x}} \rightarrow \frac{3}{1}$ ($x \rightarrow -\infty$ でも $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ は変わらない)。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{x+4} = 3$$

標準 (9~15) ※パターンは自分で判定

9 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ を求めよ。

極限值 1/4

分子・分母に $\sqrt{x+2}+2$ を掛けて有理化する。

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{(x+2)-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

10 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ を求めよ。

極限值 1/2

分子・分母に $\sqrt{1+x}+1$ を掛けて有理化する。

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$ を求めよ。

極限值 5/2

分母・分子それぞれの角を分母に合わせてかたまりを作る。

$$\frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{5x \cdot \frac{\sin 5x}{5x}}{2x \cdot \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}$$

$x \rightarrow 0$ のとき $\frac{\sin 5x}{5x} \rightarrow 1$ 、 $\frac{\sin 2x}{2x} \rightarrow 1$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{5}{2}$$

12 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x}$ を求めよ。

極限值 2

分母の最高次 x^2 で割る。

$$\frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x} = \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} \rightarrow \frac{2}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 3x} = 2$$

13 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ を求めよ。

極限值 inf

分子の次数（2次）が分母の次数（1次）より高いので発散する。実際に割り算すると

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x + 1}。$$

$x \rightarrow \infty$ のとき $x - 1 \rightarrow \infty$ 、 $\frac{2}{x + 1} \rightarrow 0$ なので全体は限りなく大きくなる。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ を求めよ。

極限值 -inf

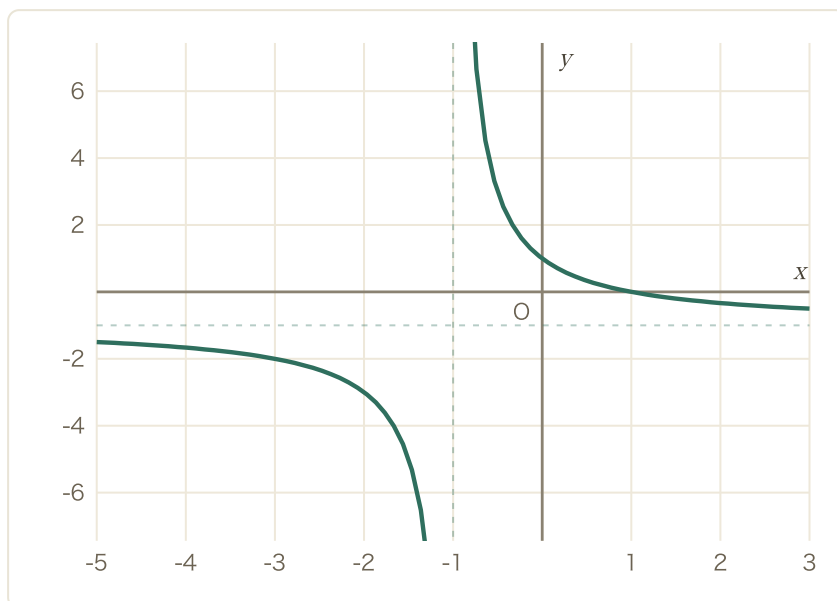
問13と同じ式変形 $\frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x + 1}$ を使う。

$x \rightarrow -\infty$ のとき $x - 1 \rightarrow -\infty$ 、 $\frac{2}{x + 1} \rightarrow 0$ なので全体は限りなく小さくなる
(負で絶対値が大きくなる)。

$x \rightarrow \infty$ のときと符号が逆になる点に注意。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = -\infty$$

$f(x) = \frac{2}{x+1} - 1$ について、次の片側極限を求めよ。



縦の漸近線 $x=-1$ 、横の漸近線 $y=-1$ に注目。

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \underline{\text{inf}} \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \underline{-\text{inf}}$$

$x \rightarrow -1+0$ のとき $x+1$ は正の側から 0 に近づくので、 $\frac{2}{x+1}$ はいくらでも大きくなり、 -1 を引いても発散の向きは変わらない。

$x \rightarrow -1-0$ のとき $x+1$ は負の側から 0 に近づくので、 $\frac{2}{x+1}$ はいくらでも小さくなる。

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = -\infty$$

挑戦 (16~18)

16

半角公式を使うsinの極限

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ を求めよ。

極限值 2

半角公式 $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ に $\theta = 2x$ を代入すると $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ 。

$$\frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = 2 \times 1^2 = 2$$

17

3次式の約分

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ を求めよ。

極限值 3/2

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ 、 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ なので、

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ を求めよ。

極限值 1/2

$\infty - \infty$ の不定形。共役 $\sqrt{x^2 + x} + x$ を掛けて有理化する。

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$x > 0$ なので、分子・分母を x で割る ($\sqrt{x^2 + x} = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ を使う)。

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

$x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。sinの応用と、極限値の条件から係数を決める問題に挑戦しよう。

応1

sinの差の極限

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{x}$ を求めよ。

極限値 2

分数を2つに分けて、それぞれ $\sin kx/x$ の形にする。

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{x} = \frac{\sin 3x}{x} - \frac{\sin x}{x} = 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\sin x}{x}$$

$x \rightarrow 0$ のとき $\frac{\sin 3x}{3x} \rightarrow 1$ 、 $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{x} = 3 \times 1 - 1 = 2$$

応2

tanの極限

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ を求めよ。

極限値 1

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ なので、

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$x \rightarrow 0$ のとき $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ 、 $\cos x \rightarrow \cos 0 = 1$ より $\frac{1}{\cos x} \rightarrow 1$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \times 1 = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 6}{x - 2}$ が有限の値になるように定数 a の値を定め、そのときの極限値を求めよ。

$a = \underline{1}$ 極限値 $\underline{5}$

分母 $x - 2$ は $x \rightarrow 2$ で 0 に近づく。もし分子が $x = 2$ で 0 にならなければ、式全体は発散してしまい「有限の値」にはならない。

したがって分子も $x = 2$ で 0 にならなければならない（これが有限になるための条件）。

分子に $x = 2$ を代入： $4 + 2a - 6 = 0$ より $2a = 2$ 、 $a = 1$ 。

$a = 1$ のとき分子は $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ と因数分解できる（ $x = 2$ が根なので $x - 2$ を因数に持つ）。

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} = x + 3$$

$a = 1$ 、極限値は $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 2 + 3 = 5$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$ が成り立つように定数 a, b の値を定めよ。

$$a = \underline{-1} \quad b = \underline{-1}$$

分母が $x \rightarrow 1$ で 0 に近づき、極限値が 3 (有限) と指定されているので、分子も $x = 1$ で 0 でなければならない。

分子に $x = 1$ を代入 : $2 + a + b = 0 \quad \cdots(1)$

分子が $x - 1$ を因数に持つので $2x^2 + ax + b = (x - 1)(2x + c)$ と書ける (c は定数)。展開すると $2x^2 + (c - 2)x - c$ 。

係数比較 : $a = c - 2, b = -c$ 。

商 $2x + c$ に $x = 1$ を代入した値が極限値になるので、 $2 + c = 3$ より $c = 1$ 。

このとき $a = c - 2 = -1, b = -c = -1$ 。(1)式で確認 : $2 + (-1) + (-1) = 0$ で成立)

$a = -1, b = -1$ (実際 $2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$ となり、極限値は $2 \times 1 + 1 = 3$)

次の2つの極限をそれぞれ求めよ。

(A) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$

(B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} + x \right)$

(A)の極限值 $\frac{3}{2}$ (B)の極限值 $-\frac{3}{2}$

(A) 共役 $\sqrt{x^2 + 3x} + x$ を掛けて有理化する。

$$\sqrt{x^2 + 3x} - x = \frac{(x^2 + 3x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$$

$$x \rightarrow \infty \text{ では } x > 0 \text{ なので、分子・分母を } x \text{ で割ると } (\sqrt{x^2 + 3x} = x\sqrt{1 + \frac{3}{x}})$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} \rightarrow \frac{3}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

(B) $x \rightarrow -\infty$ では x が負なので、(A)と同じように処理すると符号の扱いに注意が必要。 $x = -t$ ($t \rightarrow +\infty$) と置き換える。

$$\sqrt{x^2 + 3x} + x = \sqrt{t^2 - 3t} - t = \frac{(t^2 - 3t) - t^2}{\sqrt{t^2 - 3t} + t} = \frac{-3t}{\sqrt{t^2 - 3t} + t}$$

$t > 0$ なので分子・分母を t で割ると

$$= \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{t}} + 1} \rightarrow \frac{-3}{1 + 1} = -\frac{3}{2}$$

$x \rightarrow \infty$ と $x \rightarrow -\infty$ では符号が逆転する点が最大の注意点。

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$