

数列の極限・無限級数

問題プリント（全34問）

氏名 _____

得点 /34点

DRILL

練習問題（全20問）

基本（1～8）

1

$|r| < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ を求めよ。

極限值

2

$r > 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n$ を求めよ。

極限值

3

$r < -1$ ・振動

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n$ について、収束・発散を判定せよ。

判定

4

分数式・最高次で割る

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+4}$ を求めよ。

極限值

5

分数式・最高次で割る

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3}{2n+7}$ を求めよ。

極限值

6

無限等比級数の和

初項2、公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数の和を求めよ。

和

7

無限等比級数の和・公比が負

初項4、公比 $-\frac{1}{2}$ の無限等比級数の和を求めよ。

和

8

数列の極限の性質（線形結合・商）

数列の極限には次の性質がある($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき、 k を定数として)。

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k\alpha$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha\beta$, $b_n \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ のとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ を満たすとき、次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3b_n)$

極限值

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

極限值

標準 (9~19)

9 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + n}$ を求めよ。

極限值

10 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{2n^3 + 5}$ を求めよ。

極限值

11 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n}{n^2 + 3}$ を求めよ。

極限值

12 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n)$ を求めよ。

極限值

13 はさみうちの原理

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$ を求めよ。

極限值

14 はさみうちの原理

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \cos n}{n}$ を求めよ。

極限值

15 循環小数の変換

循環小数 $0.777\dots$ を分数で表せ。

分数

16 隣接二項間漸化式の極限 (不動点を用いた等比数列化)

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$ で定められているとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

極限值

17 無限級数の和 (部分分数分解による打ち消し合い)

次の無限級数の和を求めよ。 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

和

18 無限等比級数の項別の和

次の無限級数の和を求めよ。

$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}$

和

19 数列の極限における大小関係の遺伝

数列の極限には次の性質がある。数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束し、すべての n で $a_n \leq b_n$ が成り立つならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ である。

数列 $a_n = \frac{n}{n+1}$, $b_n = \frac{n+1}{n}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

極限值

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

極限值

挑戦 (20~27)

20 根号の有理化・係数なし

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ を求めよ。

極限值

21 無限等比級数の和・公比が負

初項12、公比 $-\frac{1}{3}$ の無限等比級数の和を求めよ。

和

22 循環小数の変換・2桁くり返し

循環小数 $0.454545\dots$ を分数で表せ。

分数

23

数B既習の和の公式を利用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} \text{ を求めよ。}$$

 極限值

24

漸化式で定義された数列の極限・収束の証明

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義されている。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

 極限值

25

無限級数の発散判定・必要条件の対偶

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2n+3}$ の収束・発散を判定せよ。

 判定

26

3項間漸化式の極限（特性方程式の2解による一般項の利用）

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ を満たすとき、一般項 a_n を求め、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n}$ を求めよ。

 極限值

27

数列の極限のパラメータ決定（公比が文字定数）

実数 x を用いて数列 $\{a_n\}$ を $a_n = (2x - 3)^n$ と定める。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。

 xの範囲

(2) (1)の範囲のうち、数列 $\{a_n\}$ の極限値が0以外の値になるような x の値を求めよ。

 x=

DRILL

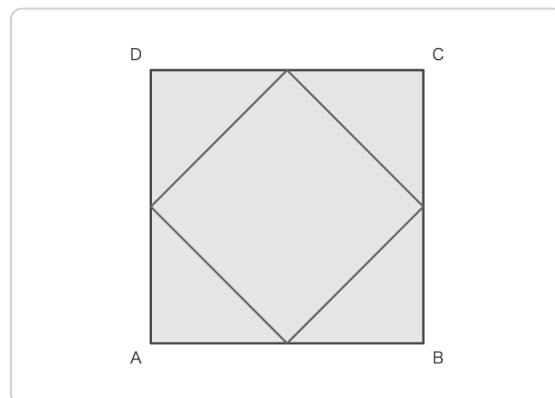
応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。図形の面積の無限級数や、本格的なはさみうちの原理に挑戦しよう。

応1

図形の無限級数（面積の和）

1辺の長さが4の正方形がある。各辺の中点を結んで新しい正方形を作り、さらにその正方形の各辺の中点を結んで正方形を作る……という操作を無限に繰り返す。すべての正方形（最初の正方形を含む）の面積の総和を求めよ。


 面積の総和

応2

図形の無限級数（正三角形の面積の和）

1辺の長さが4の正三角形がある。各辺の中点を結んで新しい正三角形を作り、さらにその正三角形の各辺の中点を結んで正三角形を作る……という操作を無限に繰り返す。すべての正三角形（最初の正三角形を含む）の面積の総和を求めよ。

面積の総和

応3

はさみうちの本格問題（ n 項の和）

$a_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n}$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

極限值

応4

はさみうちの本格問題（値が予測不能な項）

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!)}{n}$ を求めよ。（ $n!$ は n の階乗）

極限值

応5

文章題：無限等比級数の応用（バウンドするボール）

地面からの高さ10mの位置からボールを静かに落とす。ボールは地面に当たるたびに、直前の高さの $\frac{3}{5}$ の高さまで跳ね返るとする。ボールが跳ね返りを限りなく繰り返して最終的に静止するまでに動く距離の総和を求めよ。

距離の総和

m

DRILL 記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

はさみうちの原理はなぜ成り立つのか。不等式 $a_n \leq b_n \leq c_n$ が意味することに触れながら説明せよ。

記2

循環小数 $0.181818\dots$ を、無限等比級数の考え方をを用いて分数で表せ。過程をすべて記述せよ。