

数列の極限・無限級数

解答（全23問）

氏名 _____

得点 /23点

DRILL

練習問題（全18問）

基本（1～7）

1

$|r| < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ を求めよ。

極限值 0

$r = \frac{1}{5}$ は $-1 < r < 1$ を満たすので0に収束する。

0

2

 $r > 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n$ を求めよ。

極限值 inf

$r = 4$ は $r > 1$ を満たすので、正の無限大に発散する。

∞

3

 $r < -1$ ・ 振動

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)^n$ について、収束・発散を判定せよ。

判定 発散

$r = -2$ は $r < -1$ にあたる。符号が交互に変わりながら絶対値が増大するので、極限値を持たない。

振動して発散する

4

分数式・最高次で割る

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+4}$ を求めよ。

極限值 1

分子・分母を n で割ると $\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n}} \rightarrow \frac{1+0}{1+0}$

1

5

分数式・最高次で割る

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-3}{2n+7}$ を求めよ。

極限值 $\frac{5}{2}$

分子・分母を n で割ると $\frac{5 - \frac{3}{n}}{2 + \frac{7}{n}} \rightarrow \frac{5-0}{2+0}$

$\frac{5}{2}$

6

無限等比級数の和

初項2、公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数の和を求めよ。

和 3

$|r| < 1$ なので収束する。 $S = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}}$

3

7

無限等比級数の和・公比が負

初項4、公比 $-\frac{1}{2}$ の無限等比級数の和を求めよ。

和 $\frac{8}{3}$

$|r| = \frac{1}{2} < 1$ なので収束する。 $S = \frac{4}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{4}{\frac{3}{2}}$

$\frac{8}{3}$

8 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + n}$ を求めよ。

極限值 1

分子・分母を n^2 で割ると $\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 + 0}$

1

9 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{2n^3 + 5}$ を求めよ。

極限值 0

分母の最高次は n^3 なので、分子・分母を n^3 で割る。

$$\frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^3}} \rightarrow \frac{0 + 0}{2 + 0} = 0$$

(分子の次数が分母の次数より低いので0に収束する)

0

10 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n}{n^2 + 3}$ を求めよ。

極限值 inf

分母の最高次は n^2 なので、分子・分母を n^2 で割る。

$$\frac{n + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n^2}} \rightarrow \infty$$

(分子の次数が分母の次数より高いので発散する)

∞

11 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n)$ を求めよ。

極限值 3/2

分子・分母に $\sqrt{n^2 + 3n} + n$ をかけて有理化する。

$$\sqrt{n^2 + 3n} - n = \frac{(n^2 + 3n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}$$

分子・分母を n で割ると

$$= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}$$

12 はさみうちの原理

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$ を求めよ。

極限值 0

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$ より $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ 。両端はともに0に収束するので、はさみうちの原理より

$$0$$

13 はさみうちの原理

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \cos n}{n}$ を求めよ。

極限值 0

$-1 \leq \cos n \leq 1$ より $2 \leq 3 + \cos n \leq 4$ 。各辺を n で割ると $\frac{2}{n} \leq \frac{3 + \cos n}{n} \leq \frac{4}{n}$ 。両端はともに0に収束するので、はさみうちの原理より

$$0$$

循環小数 $0.777\dots$ を分数で表せ。

分数 $\frac{7}{9}$

$0.777\dots = 0.7 + 0.07 + 0.007 + \dots$ は初項 $0.7 = \frac{7}{10}$ 、公比 $\frac{1}{10}$ の無限等比級数。

$$S = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{7}{9}$$

挑戦 (15~18)

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ を求めよ。

極限值 0

分子・分母に $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ をかけて有理化する。

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき分母は限りなく大きくなるので、分数全体は0に近づく。

$$0$$

16

無限等比級数の和・公比が負

初項12、公比 $-\frac{1}{3}$ の無限等比級数の和を求めよ。

和 9

$$|r| = \frac{1}{3} < 1 \text{ なので収束する。 } S = \frac{12}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{12}{\frac{4}{3}}$$

9

17

循環小数の変換・2桁くり返し

循環小数 $0.454545\dots$ を分数で表せ。

分数 5/11

$0.454545\dots = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \dots$ は初項 $0.45 = \frac{45}{100}$ 、公比 $\frac{1}{100}$ の無限等比級数。

$$S = \frac{\frac{45}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{45}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

$\frac{5}{11}$

18

数B既習の和の公式を利用

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$ を求めよ。

極限值 1/2

数Bの和の公式 $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ を使う。

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

分子・分母を n で割ると $\frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \rightarrow \frac{1 + 0}{2}$

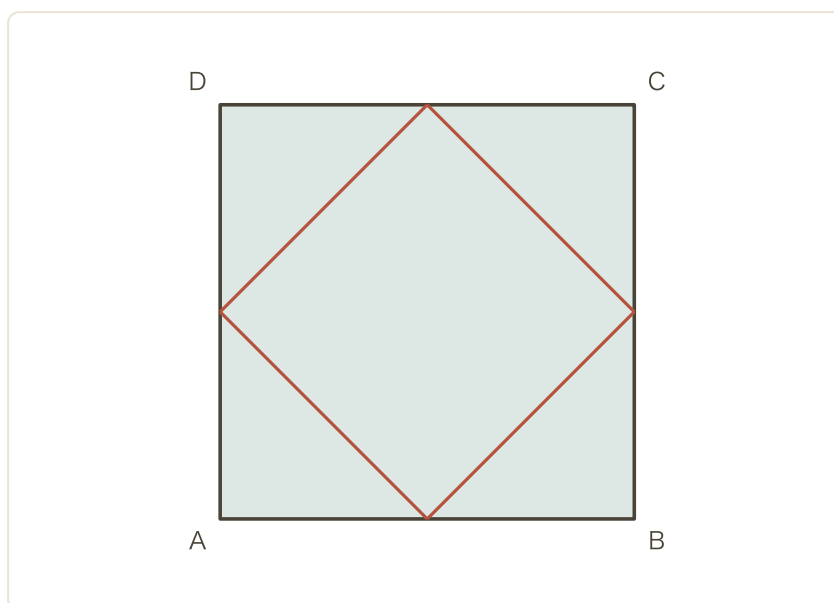
$\frac{1}{2}$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。図形の面積の無限級数や、本格的なはさみうちの原理に挑戦しよう。

1辺の長さが4の正方形がある。各辺の中点を結んで新しい正方形を作り、さらにその正方形の各辺の中点を結んで正方形を作る……という操作を無限に繰り返す。すべての正方形（最初の正方形を含む）の面積の総和を求めよ。



面積の総和 32

最初の正方形の面積は $4^2 = 16$ 。

1辺 a の正方形の各辺の中点を結んでできる正方形は、対角線の長さが a （もとの正方形の1辺）になる正方形なので、面積は $\frac{1}{2}a^2$ 。つまり1回の操作で面積はちょうど半分になる。

よって面積の数列は初項16、公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比数列。 $|r| = \frac{1}{2} < 1$ なので級数は収束し、

$$S = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{16}{\frac{1}{2}}$$

面積の総和は 32

1辺の長さが4の正三角形がある。各辺の中点を結んで新しい正三角形を作り、さらにその正三角形の各辺の中点を結んで正三角形を作る……という操作を無限に繰り返す。すべての正三角形（最初の正三角形を含む）の面積の総和を求めよ。

面積の総和 $16\sqrt{3}/3$

1辺 a の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 。最初の正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$ 。

各辺の中点を結んでできる正三角形は、1辺の長さがもとの半分になるので、面積は

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 倍になる。

よって面積の数列は初項 $4\sqrt{3}$ 、公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比数列。 $|r| = \frac{1}{4} < 1$ なので級数は収束し、

$$S = \frac{4\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

面積の総和は $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

応3

はさみうちの本格問題（ n 項の和）

$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

極限值 0

a_n は n 個の分数の和で、それぞれの分母は n^2+1 から n^2+n までの範囲にある。分母が大きいほど分数の値は小さいので、すべての項を最大の分母 n^2+n にそろえると各項は小さくなり、最小の分母 n^2+1 にそろえると各項は大きくなる。よって

$$\underbrace{\frac{1}{n^2+n} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}}_{n\text{個}} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{n^2+1}}_{n\text{個}}$$

すなわち

$$\frac{n}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{n}{n^2+1}$$

左端 $\frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ 、右端 $\frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0$ （分母の次数が分子より高い）。両端がともに0に収束するので、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

応4

はさみうちの本格問題（値が予測不能な項）

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!)}{n}$ を求めよ。（ $n!$ は n の階乗）

極限值 0

$n!$ がどんな値でも、 $\sin$ の中身が何であれ $-1 \leq \sin(n!) \leq 1$ は常に成り立つ（ $\sin \theta$ の値は θ に関係なく必ず -1 以上 1 以下）。よって

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n!)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$\sin(n!)$ の値そのものは複雑で予測できないが、それを気にする必要はない。両端がともに0に収束するので、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n!)}{n} = 0$$

地面からの高さ10mの位置からボールを静かに落とす。ボールは地面に当たるたびに、直前の高さの $\frac{3}{5}$ の高さまで跳ね返るとする。ボールが跳ね返りを限りなく繰り返して最終的に静止するまでに動く距離の総和を求めよ。

距離の総和 40 m

最初の落下距離は 10m。その後は「跳ね返って上がる距離」と「落ちてくる距離」が同じ長さで1往復ずつ繰り返される。

1回目の跳ね返りの高さは $10 \times \frac{3}{5} = 6\text{m}$ 、この上り下りで動く距離は $2 \times 6 = 12\text{m}$ 。

2回目の跳ね返りの高さは $6 \times \frac{3}{5}\text{m}$ 、動く距離は $2 \times 6 \times \frac{3}{5}\text{m}$ 。……というように、跳ね返りごとの往復距離は初項 12、公比 $\frac{3}{5}$ の無限等比数列になる。

往復距離の総和は $\frac{12}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{12}{\frac{2}{5}} = 30\text{m}$ 。

最初の落下距離 10m と合わせて

総距離は $10 + 30 = 40\text{m}$