

極限 まとめ

問題プリント（全27問）

氏名 _____

得点 /27点

DRILL まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

$|r| < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を求めよ。

極限值

2

$r > 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 6^n$ を求めよ。

極限值

3

$r < -1$ ・振動

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-4)^n$ について、収束・発散を判定せよ。

判定

4

分数式・最高次で割る

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n-1}$ を求めよ。

極限值

5

無限等比級数の和

初項6、公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数の和を求めよ。

和

6

約分

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ を求めよ。

極限值

7

$\sin$ の基本公式

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ を求めよ。

極限值

8

$x \rightarrow \infty$ ・同次数

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{2x-3}$ を求めよ。

極限值

9

$x \rightarrow \infty$ ・分子の次数が低い

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2+1}$ を求めよ。

極限值

10

片側極限

$f(x) = \frac{1}{x-3}$ について、 $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x)$ をそれぞれ求めよ。

$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) =$ $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) =$

11

連続になるように定数を定める (分数式)

次の関数が $x = 4$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & (x \neq 4) \\ a & (x = 4) \end{cases}$$

$a =$

12

連続になるように定数を定める (区分的定義)

次の関数が $x = 2$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & (x \leq 2) \\ x^2 + 1 & (x > 2) \end{cases}$$

$a =$

13

はさみうちの原理

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n}$ を求めよ。

極限值

14

循環小数の変換

循環小数 $0.555\dots$ を分数で表せ。

分数

15

中間値の定理の適用判定

中間値の定理を用いて、方程式 $x^3 - 2x - 5 = 0$ が区間 $[2, 3]$ に実数解をもつと言えるか。言えるなら「ある」、言えないなら「ない」と答えよ。

答え

発展 (16~25)

16

根号の有理化 ($x \rightarrow 0$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$ を求めよ。

極限值

17

根号の有理化 (数列)

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)$ を求めよ。

極限值

18

半角公式を使うsinの極限

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$ を求めよ。

極限值

19

2文字の係数決定

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + ax + b}{x - 2} = 5$ が成り立つように定数 a, b の値を定めよ。

$a =$ $b =$

20

中間値の定理の適用判定

中間値の定理を用いて、方程式 $x^3 - 6x + 2 = 0$ が区間 $[0, 1]$ に実数解をもつと言えるか。言えるなら「ある」、言えないなら「ない」と答えよ。

答え

21

無限級数の発散判定・必要条件の対偶

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n+2}$ の収束・発散を判定せよ。

判定

22

 $x \rightarrow -\infty$ の符号のトラップ

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} + x)$ を求めよ。

極限值

23

次章 (微分) の準備: 平均変化率の極限

$f(x) = x^2$ について、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ を求めよ。

極限值

24

sinの極限×連続の定義（複合問題）

次の関数が $x = 0$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

 $a =$

25

総合問題：この章の技法を組み合わせる（章の総仕上げ）

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+1}{3x-2}$ 、 $r = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$ とするとき、初項 a 、公比 r の無限等比級数の和を求めよ。

 $a =$

 $r =$

和

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

この章は「数列の極限」「関数の極限」「関数の連続性」という3つの節で構成されている。この3つがどのようにつながっているか、また、この章で学んだ考え方が次章「微分法」にどう活かされるかを説明せよ。

記2

次の3つの極限をそれぞれ求め、それぞれどの処理方法（最高次の項で割る／有理化する／公式を使う、など）を選んだか、選んだ理由も含めて説明せよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

(3) 初項8、公比 $-\frac{1}{4}$ の無限等比級数の和

E X A M
共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分/配点 20点

花子さんは、ある薬を毎日同じ時刻に1回、100mgずつ服用したときに体内に残る薬の量について、先生と一緒に考えている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「この薬は、24時間経つと体内の量がちょうど $\frac{1}{5}$ 倍になることが分かっているとしよう。花子さんが100mgずつ毎日服用し続けるとき、 n 回目の服薬直後の体内の薬の量を a_n (mg) とすると、 $a_1 = 100$ で、 $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + 100$ という関係が成り立つね。」
花子「服薬を何回も繰り返すと、 a_n はどんな値に近づいていくのか気になります。」

- (1) 数列 $\{a_n\}$ が一定の値 α に収束すると仮定すると、漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + 100$ の両辺で $n \rightarrow \infty$ とすることで $\alpha = \frac{1}{5}\alpha + 100$ が成り立つはずである。これを解くと $\alpha =$ アイウ である。また、この α を用いて漸化式を $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{5}(a_n - \alpha)$ の形に変形すると、 $a_1 - \alpha =$ エオ (符号もつけて入力) となる。

アイウ エオ

- (2) (1)より、数列 $\{a_n - \alpha\}$ は初項 $a_1 - \alpha$ 、公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列である。これを用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めると カキク である。

カキク

- (3) 花子「では、服薬直後の体内の薬の量が120mg以上になるのは、何回目の服薬直後からですか。」
(2)で求めた一般項 $a_n = 125 - 25 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ を用いて、 $a_n \geq 120$ を満たす最小の n を求めると $n =$ ケ である。

ケ

大問2 目標時間 8分/配点 20点

文化祭の科学部では、1日の気温 $T(x)$ (x 時間後、単位は $^{\circ}\text{C}$) を観測データから次のように近似することにした。太郎さんと先生が、このモデルについて話している。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

$$T(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1 & (0 \leq x < 5) \\ -2x + b & (5 \leq x \leq 10) \end{cases}$$

先生「 b の値はまだ決まっていない。観測データが $x = 5$ のところで途切れずにつながって見えるように、 $T(x)$ が $x = 5$ で連続になるように b を決めよう。」

(1) $\lim_{x \rightarrow 5-0} T(x)$ を求めよ。 (符号もつけて入力)

コサ

(2) $T(x)$ が $x = 5$ で連続になるように、定数 b の値を定めよ。 $b =$ (符号もつけて入力)

ス

(3) 太郎「気温が 0°C になる瞬間が、朝の観測開始から何時間後にあるか気になりますね。」
先生「(2)で $b = -4$ と決まったから、 $5 \leq x \leq 10$ では $T(x) = -2x - 4$ だ。この区間で $T(x)$ の符号がどうなるか確かめてごらん。」
太郎「 $T(5) = -14$ 、 $T(10) = -24$ で、しかも1次関数だから区間全体で負のままですね。」
先生「その通り。だから 0°C になる瞬間があるとすれば、残りの区間 $0 \leq x < 5$ の中だけだ。」
気温が 0°C になる時刻の1つが、区間 $0 \leq x < 5$ の中の、整数 n を用いて $n < x < n + 1$ と表せる範囲に存在することを、中間値の定理を用いて示すとき、 n の値を求めよ。 $n =$

セ