

極限 まとめ

解答（全27問）

氏名 _____

得点 _____ / 27点

DRILL

まとめテスト（標準）

基本（1～15）

1

$|r| < 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ を求めよ。

極限值 0

$r = \frac{3}{4}$ は $-1 < r < 1$ を満たすので0に収束する。

0

2

 $r > 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 6^n$ を求めよ。

極限值 inf

$r = 6$ は $r > 1$ を満たすので、正の無限大に発散する。

∞

3

 $r < -1$ ・ 振動

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-4)^n$ について、収束・発散を判定せよ。

判定 発散

$r = -4$ は $r < -1$ にあたる。符号が交互に変わりながら絶対値が増大するので、極限值を持たない。

振動して発散する

4

分数式・最高次で割る

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{n - 1}$ を求めよ。

極限值 3

分子・分母を n で割ると $\frac{3 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{3 + 0}{1 - 0}$

3

5

無限等比級数の和

初項6、公比 $\frac{1}{3}$ の無限等比級数の和を求めよ。

和 9

$$|r| < 1 \text{ なので収束する。 } S = \frac{6}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{6}{\frac{2}{3}}$$

9

6

約分

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ を求めよ。

極限值 5

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 3 + 2 = 5$$

7

sinの基本公式

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ を求めよ。

極限值 5

$$\frac{\sin 5x}{x} = 5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \rightarrow 5 \times 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5$$

8

 $x \rightarrow \infty$ ・同次数

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{2x - 3}$ を求めよ。

極限值 $\frac{5}{2}$

分母の最高次の項 x で割ると $\frac{5 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{3}{x}} \rightarrow \frac{5}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{2x - 3} = \frac{5}{2}$$

9

 $x \rightarrow \infty$ ・分子の次数が低い

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x^2 + 1}$ を求めよ。

極限值 0

分母の次数（2次）が分子の次数（1次）より高いので、分母の最高次 x^2 で割ると分子は0に近づく。

$$\frac{x + 2}{x^2 + 1} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{0}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x^2 + 1} = 0$$

$f(x) = \frac{1}{x-3}$ について、 $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x)$ をそれぞれ求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \underline{\text{inf}} \quad \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \underline{-\text{inf}}$$

$x \rightarrow 3+0$ (x が3よりわずかに大きい) のとき、 $x-3$ は正の側から0に近づくので
 $\frac{1}{x-3}$ はいくらでも大きくなる。

$x \rightarrow 3-0$ (x が3よりわずかに小さい) のとき、 $x-3$ は負の側から0に近づくので
 $\frac{1}{x-3}$ はいくらでも小さく (負に大きく) なる。

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = -\infty$$

次の関数が $x = 4$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & (x \neq 4) \\ a & (x = 4) \end{cases}$$

$$a = \underline{8}$$

$$x \neq 4 \text{ のとき } f(x) = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4。$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 8。$$

$$a = 8$$

12

連続になるように定数を定める（区分的定義）

次の関数が $x = 2$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & (x \leq 2) \\ x^2 + 1 & (x > 2) \end{cases}$$

$$a = \underline{1}$$

$x \leq 2$ の式から $f(2) = 4 + a$ 。

右側の極限は $\lim_{x \rightarrow 2+0} (x^2 + 1) = 4 + 1 = 5$ 。

一致させると $4 + a = 5$ 。

$$a = 1$$

13

はさみうちの原理

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n}$ を求めよ。

極限值 $\underline{0}$

$-1 \leq \cos n \leq 1$ より、各辺を正の数 n で割って $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$ 。両端はともに 0 に収束するので、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} = 0$$

循環小数 $0.555\dots$ を分数で表せ。

分数 $\frac{5}{9}$

$0.555\dots = 0.5 + 0.05 + 0.005 + \dots$ は初項 $0.5 = \frac{5}{10}$ 、公比 $\frac{1}{10}$ の無限等比級数。

$$S = \frac{\frac{5}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{5}{9}$$

中間値の定理を用いて、方程式 $x^3 - 2x - 5 = 0$ が区間 $[2, 3]$ に実数解をもつと言えるか。言えるなら「ある」、言えないなら「ない」と答えよ。

答え ある

$f(x) = x^3 - 2x - 5$ とおくと整式なので連続。

$f(2) = 8 - 4 - 5 = -1 < 0$ 、 $f(3) = 27 - 6 - 5 = 16 > 0$ 。異符号。

中間値の定理により、区間 $[2, 3]$ に解があると言える → ある

16

根号の有理化 (x→0)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$ を求めよ。

極限值 1/6

分子・分母に $\sqrt{x+9} + 3$ を掛けて有理化する。

$$\frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} = \frac{(x+9) - 9}{x(\sqrt{x+9} + 3)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+9} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

17

根号の有理化 (数列)

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)$ を求めよ。

極限值 5/2

分子・分母に $\sqrt{n^2 + 5n} + n$ を掛けて有理化する。

$$\sqrt{n^2 + 5n} - n = \frac{(n^2 + 5n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n} + n} = \frac{5n}{\sqrt{n^2 + 5n} + n}$$

分子・分母を n で割ると

$$= \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + 1} \rightarrow \frac{5}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) = \frac{5}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$ を求めよ。

極限值 9/2

半角公式 $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ に $\theta = 3x$ を代入すると $1 - \cos 3x = 2 \sin^2 \frac{3x}{2}$ 。

$$\frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} = 2 \left(\frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{3x}{2} \right)^2 \div x^2 = 2 \left(\frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{9}{4}$$

$x \rightarrow 0$ のとき $\frac{3x}{2} \rightarrow 0$ なので $\frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \rightarrow 1$ 。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = 2 \times 1^2 \times \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + ax + b}{x - 2} = 5$ が成り立つように定数 a, b の値を定めよ。

$a =$ -7 $b =$ 2

分母が $x \rightarrow 2$ で0に近づき、極限値が5（有限）と指定されているので、分子も $x = 2$ で0でなければならない。

分子に $x = 2$ を代入： $12 + 2a + b = 0 \quad \cdots(1)$

分子が $x - 2$ を因数に持つので $3x^2 + ax + b = (x - 2)(3x + c)$ と書ける（ c は定数）。展開すると $3x^2 + (c - 6)x - 2c$ 。

係数比較： $a = c - 6, b = -2c$ 。

商 $3x + c$ に $x = 2$ を代入した値が極限値になるので、 $6 + c = 5$ より $c = -1$ 。

このとき $a = c - 6 = -7, b = -2c = 2$ 。((1)式で確認： $12 + 2(-7) + 2 = 0$ で成立)

$a = -7, b = 2$ (実際 $3x^2 - 7x + 2 = (x - 2)(3x - 1)$ となり、極限値は $3 \times 2 - 1 = 5$)

中間値の定理を用いて、方程式 $x^3 - 6x + 2 = 0$ が区間 $[0, 1]$ に実数解をもつと言えるか。言えるなら「ある」、言えないなら「ない」と答えよ。

答え ある

$f(x) = x^3 - 6x + 2$ とおくと整式なので連続。

$f(0) = 2 > 0$ 、 $f(1) = 1 - 6 + 2 = -3 < 0$ 。異符号。

中間値の定理により、区間 $[0,1]$ に解があると言える → ある

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n+2}$ の収束・発散を判定せよ。

判定 発散

一般項 $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$ の極限を調べる。分子・分母を n で割ると

$$a_n = \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow \frac{3+0}{1+0} = 3 \quad (n \rightarrow \infty)$$

極限值は $3 \neq 0$ である。無限級数が収束するならば一般項は 0 に収束するはずなので、その対偶より、一般項が 0 に収束しないこの級数は収束しない。

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n+2}$ は発散する

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} + x)$ を求めよ。

極限值 -2

$x \rightarrow -\infty$ なので $x = -t$ ($t \rightarrow +\infty$) と置き換える。

$$\sqrt{x^2 + 4x} + x = \sqrt{t^2 - 4t} - t = \frac{(t^2 - 4t) - t^2}{\sqrt{t^2 - 4t} + t} = \frac{-4t}{\sqrt{t^2 - 4t} + t}$$

$t > 0$ なので分子・分母を t で割ると

$$= \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{t}} + 1} \rightarrow \frac{-4}{1 + 1} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} + x) = -2$$

$f(x) = x^2$ について、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ を求めよ。

極限值 4

$f(2+h) = (2+h)^2 = 4 + 4h + h^2$ 、 $f(2) = 4$ なので

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(4 + 4h + h^2) - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h \quad (h \neq 0 \text{なら約分できる})$$

$h \rightarrow 0$ を代入すると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 4 \quad (\text{この形は次章「微分係数」の定義そのものである})$$

次の関数が $x = 0$ で連続となるように、定数 a の値を定めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

$$a = \underline{3}$$

$$x \neq 0 \text{ のとき } \frac{\sin 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \times 1 = 3$$

連続にするには $f(0) = a$ がこの極限值と一致すればよい。

$$a = 3$$

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+1}{3x-2}$ 、 $r = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$ とするとき、初項 a 、公比 r の無限等比級数の和を求めよ。

$$a = \underline{2} \quad r = \underline{1/2} \quad \text{和} \quad \underline{4}$$

まず a を求める。分母の最高次 x で割ると

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{1}{x}}{3 - \frac{2}{x}} = \frac{6}{3} = 2$$

次に r を求める。 $\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x}$ なので

$$r = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$|r| = \frac{1}{2} < 1$ なので、初項 2 、公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数は収束し、和は

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$a = 2, r = \frac{1}{2}, \text{無限等比級数の和は } 4$$

DRILL

記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

この章は「数列の極限」「関数の極限」「関数の連続性」という3つの節で構成されている。この3つがどのようにつながっているか、また、この章で学んだ考え方が次章「微分法」にどう活かされるかを説明せよ。

数列の極限は「 n を限りなく大きくしたときに a_n がどこに近づくか」という、1方向（ $n \rightarrow \infty$ ）だけの近づき方を扱うものである。関数の極限は、この考え方を $x \rightarrow a$ という一般の近づき方に拡張したものだが、数列と違って x は a より大きい側からも小さい側からも近づけるため、「右側極限」「左側極限」という新しい区別が必要になる。この2つが一致するときに限って $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在すると言える、というのが数列の極限にはなかった新しい視点である。

さらに「連続」という性質は、この関数の極限の言葉を使って初めて厳密に定義できる。 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ という1本の等式が、「グラフがちぎれずに繋がっている」という直感的なイメージを、計算で確認できる形に翻訳している。中間値の定理や e の定義も、この「極限」という言葉があって初めて意味を持つ道具である。

次章の「微分法」では、微分係数という新しい量が $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ という極限として定義される。これはまさにこの章で身につけた「 $0/0$ の不定形を、約分や有理化で処理してから極限をとる」という技術をそのまま使う場面である。また、 $\sin x/x \rightarrow 1$ という公式は三角関数の導関数を求めるときに、 e の定義は指数関数・対数関数の導関数を求めるときに、それぞれ直接使われる。つまりこの章は独立した1つの単元というより、次章以降で使う「計算の部品」を先に一通りそろえておく章である。

数列の極限を右側・左側という近づき方に拡張したものが関数の極限であり、その関数の極限の言葉で「連続」を定義する、という流れでこの章はつながっている。ここで身につけた不定形の処理技術・ $\sin x/x$ の公式・ e の定義は、次章「微分法」の微分係数の定義や導関数の計算にそのまま使われる。

記2 次の3つの極限をそれぞれ求め、それぞれどの処理方法（最高次の項で割る／有理化する／公式を使う、など）を選んだか、選んだ理由も含めて説明せよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+3}$
 (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
 (3) 初項8、公比 $-\frac{1}{4}$ の無限等比級数の和

(1) この式は多項式÷多項式という分数式であり、 $n \rightarrow \infty$ のときそのまま代入すると ∞/∞ の不定形になってしまう。このタイプは分母の最高次の項（ここでは n ）で分子・分母を割るのが基本方針である。

$$\frac{4n-1}{2n+3} = \frac{4-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ 、 $\frac{3}{n} \rightarrow 0$ なので、極限値は $\frac{4-0}{2+0} = 2$ 。

(2) この式は $x \rightarrow 0$ をそのまま代入すると $\frac{0}{0}$ の不定形になり、しかも根号を含んでいる。根号を含む不定形は、共役（符号を変えた式、ここでは $\sqrt{x+1}+1$ ）を分子・分母に掛けて有理化し、根号を消してから代入するのが方針である。

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

これで $x=0$ を代入できる形になり、極限値は $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ 。

(3) これは分数式でも不定形でもなく、そもそも「無限等比級数の和」という決まった公式が使える場面である。公比 $r = -\frac{1}{4}$ は $|r| = \frac{1}{4} < 1$ を満たすので収束し、公式

$S = \frac{a}{1-r}$ にそのまま代入すればよい。

$$S = \frac{8}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{8}{\frac{5}{4}} = \frac{32}{5}$$

このように、まず式の見え方（多項式の分数式か、根号を含む不定形か、公式がそのまま使える形か）を見分けることが、処理方法を選ぶ最初の一步になる。

(1) 分母の最高次 n で割って2。(2) 根号を有理化して $\frac{1}{2}$ 。(3) 無限等比級数の公式にそのまま代入して $\frac{32}{5}$ (= 6.4)。

EXAM

共通テスト形式チャレンジ

大問1 目標時間 8分/配点 20点

花子さんは、ある薬を毎日同じ時刻に1回、100mgずつ服用したときに体内に残る薬の量について、先生と一緒に考えている。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

先生「この薬は、24時間経つと体内の量がちょうど $\frac{1}{5}$ 倍になることが分かっている
としよう。花子さんが100mgずつ毎日服用し続けるとき、 n 回目の服薬直後の体内
の薬の量を a_n (mg) とすると、 $a_1 = 100$ で、 $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + 100$ という関係が
成り立つね。」

花子「服薬を何回も繰り返すと、 a_n
はどんな値に近づいていくのか気になります。」

(1)

数列 $\{a_n\}$ が一定の値 α に収束すると仮定すると、漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + 100$ の
両辺で $n \rightarrow \infty$ とすることで $\alpha = \frac{1}{5}\alpha + 100$ が成り立つはずである。これを解
くと $\alpha = \boxed{\text{アイウ}}$ である。また、この α を用いて漸化式を $a_{n+1} - \alpha =$
 $\frac{1}{5}(a_n - \alpha)$ の形に変形すると、 $a_1 - \alpha = \boxed{\text{エオ}}$ (符号もつけて入力) とな
る。

アイウ 125 エオ -25

$\alpha = \frac{1}{5}\alpha + 100$ を解く。両辺に5を掛けて $5\alpha = \alpha + 500$ 、 $4\alpha = 500$ 、 $\alpha = 125$
。

$a_{n+1} - 125 = \left(\frac{1}{5}a_n + 100\right) - 125 = \frac{1}{5}a_n - 25 = \frac{1}{5}(a_n - 125)$ となり、確
かに $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{5}(a_n - \alpha)$ の形になる。

$$a_1 = 100 \text{ なので } a_1 - \alpha = 100 - 125 = -25.$$

$$\alpha = 125, a_1 - \alpha = -25$$

(2)

(1)より、数列 $\{a_n - \alpha\}$ は初項 $a_1 - \alpha$ 、公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列である。これを用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めると **カキク** である。

カキク 125

$$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = -25 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \text{ より}$$

$$a_n = 125 - 25 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{5} \text{ は } |r| < 1 \text{ を満たすので } \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)。よって}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 125 - 0 = 125 \text{ (服薬を繰り返すほど、体内の薬の量は125mgに限りなく近づいていく)}$$

(3)

花子「では、服薬直後の体内の薬の量が120mg以上になるのは、何回目の服薬直後からですか。」

(2)で求めた一般項 $a_n = 125 - 25 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ を用いて、 $a_n \geq 120$ を満たす最小の n を求めると $n =$ **ケ** である。

ケ 2

$a_n \geq 120$ を解く。

$$125 - 25 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \geq 120$$

$$-25 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \geq -5$$

両辺を -25 で割ると、不等号の向きが変わることに注意して

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{5}$$

$\frac{1}{5}$ は1より小さい正の数なので、指数が大きいほど値は小さくなる。よって

$$n - 1 \geq 1、すなわち n \geq 2$$

実際に確かめると、 $a_1 = 100$ (120未満)、 $a_2 = 125 - 25 \times \frac{1}{5} = 125 - 5 = 120$ (120以上) となり、2回目の服薬直後から条件を満たす。

$$n = 2 \text{ (2回目の服薬直後から120mg以上になる)}$$

大問2 目標時間 8分/配点 20点

文化祭の科学部では、1日の気温 $T(x)$ (x 時間後、単位は $^{\circ}\text{C}$) を観測データから次のように近似することにした。太郎さんと先生が、このモデルについて話している。次の会話を読んで、あとの問いに答えよ。

$$T(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1 & (0 \leq x < 5) \\ -2x + b & (5 \leq x \leq 10) \end{cases}$$

先生「 b の値はまだ決まっていない。観測データが $x = 5$ のところで途切れずにつながって見えるように、 $T(x)$ が $x = 5$ で連続になるように b を決めよう。」

(1) $\lim_{x \rightarrow 5-0} T(x)$ を求めよ。 コサ (符号もつけて入力)

コサ -14

$x < 5$ の範囲では $T(x) = -x^2 + 2x + 1$ であり、これは整式なので $x = 5$ での左側極限はそのまま代入して求められる。

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} T(x) = -5^2 + 2 \times 5 + 1 = -25 + 10 + 1 = -14$$

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} T(x) = -14$$

(2) $T(x)$ が $x = 5$ で連続になるように、定数 b の値を定めよ。 $b =$ ス (符号もつけて入力)

ス -4

$x \geq 5$ の式から $T(5) = -2 \times 5 + b = -10 + b$ 。

連続にするには、(1)で求めた左側極限 -14 と $T(5)$ が一致すればよい。

$$-10 + b = -14$$

$$b = -4$$

(3)

太郎「気温が 0°C になる瞬間が、朝の観測開始から何時間後にあるか気になりますね。」

先生「(2)で $b = -4$ と決まったから、 $5 \leq x \leq 10$ では $T(x) = -2x - 4$ だ。この区間で $T(x)$ の符号がどうなるか確かめてごらん。」

太郎「 $T(5) = -14$ 、 $T(10) = -24$ で、しかも1次関数だから区間全体で負のままですね。」

先生「その通り。だから 0°C になる瞬間があるとすれば、残りの区間 $0 \leq x < 5$ の中だけだ。」

気温が 0°C になる時刻の1つが、区間 $0 \leq x < 5$ の中の、整数 n を用いて $n < x < n + 1$ と表せる範囲に存在することを、中間値の定理を用いて示すとき、 n の値を求めよ。 $n =$ セ

セ 2

まず $5 \leq x \leq 10$ の範囲を確認する。(2)より $b = -4$ なので、この区間では $T(x) = -2x - 4$ 。

これは傾き -2 の1次関数（つねに減少）で、 $T(5) = -10 - 4 = -14$ 、 $T(10) = -20 - 4 = -24$ となり、区間の両端がどちらも負。1次関数は区間内で単調に変化するので、この間で $T(x)$ が 0 になることはない。

よって 0°C になる瞬間があるとすれば、残りの区間 $0 \leq x < 5$ の中である。この区間では $T(x) = -x^2 + 2x + 1$ であり、整式なのでこの区間で連続。整数を順に代入して符号を調べる。

$$T(0) = 1 > 0$$

$$T(1) = -1 + 2 + 1 = 2 > 0$$

$$T(2) = -4 + 4 + 1 = 1 > 0$$

$$T(3) = -9 + 6 + 1 = -2 < 0$$

$T(2)$ と $T(3)$ が異符号なので、中間値の定理により $T(c) = 0$ となる実数 c が开区間

$(2, 3)$ に少なくとも1つ存在する。

$n = 2$ (気温が 0°C になる時刻の1つが2時間後から3時間後の間にある)