

面積・体積・曲線の長さ

問題プリント（全23問）

氏名 _____

得点 /23点

DRILL

練習問題（全14問）

基本（1～7）

1 曲線とx軸の間の面積

曲線 $y = x^2$ と x 軸、および直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 2$) を求めよ。

$S =$

2 曲線と直線の間の面積

曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 1$) を求めよ。

$S =$

3 e^x の面積

曲線 $y = e^x$ と x 軸、 y 軸、および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$S =$

4 $\sin x$ の面積

曲線 $y = \sin x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq \pi$) を求めよ。

$S =$

5 円錐の体積の確認

直線 $y = x$ ($0 \leq x \leq 3$) を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \text{ア} \pi$ と表せる。アを求めよ。

ア=

6 球の体積の確認

円 $x^2 + y^2 = 4$ の上半分を x 軸のまわりに1回転させてできる球の体積は $V = \frac{\text{ア}}{3} \pi$ と表せる。アを求めよ。

ア=

7 断面積を使う体積（回転体でない立体）

座標平面上に、底面が円 $x^2 + y^2 = 4$ で囲まれた円板であるような立体がある。この立体を x 軸に垂直な平面で切ったとき、切り口は常に正方形であり、その正方形の1辺の長さは、円をその平面で切ったときにできる弦の長さに等しい。この立体の体積 V を、 $V = \frac{\text{ア}}{3}$ の形で求めよ。アを求めよ。

ア=

標準（8～12）

8 上下の関係を確認

曲線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 2$) を求めよ。

$S =$

9 部分積分の結果を利用

曲線 $y = \ln x$ と x 軸、および直線 $x = e^2$ で囲まれた部分の面積 S ($1 \leq x \leq e^2$) を求めよ。

$S =$

10

2曲線の間を回転 (外側²-内側²)

曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分 ($0 \leq x \leq 1$) を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V を、 $V = \frac{\pi}{A}$ の形で求めよ。アを求めよ。

ア=

11

直線でも公式が使えることの確認

直線 $y = 2x + 1$ ($0 \leq x \leq 3$) の長さ L を、曲線の長さの公式を使って求めよ。

$L =$

12

 $1+(y')^2=1+x$ の形になる

曲線 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 3$) の長さ L を求めよ。

$L =$

挑戦 (13~15)

13

y軸回転は x^2 を y の式にして y で積分

曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) と y 軸、直線 $y = 1$ で囲まれた部分を、 y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V を、 $V = \frac{\pi}{A}$ の形で求めよ。アを求めよ。

ア=

14

接線の式を先に求める

曲線 $y = e^x$ と、その $x = 0$ における接線で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 1$) を求めよ。

$S =$

15

 $1+(y')^2$ が平方の形になる工夫

曲線 $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ ($1 \leq x \leq 2$) の長さ L を求めよ。

$L =$

DRILL

応用問題 (プリント限定)

ここから先はPDF限定の腕試し。2曲線の回転体・サイクロイド・面積等分など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

2曲線の間を回転

曲線 $y = x^2$ と $y = x$ で囲まれた部分 ($0 \leq x \leq 1$) を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\pi}{15}$ と表せる。アを求めよ。

ア=

応2

パラメータ曲線の長さ (サイクロイド)

サイクロイド $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) は、円が転がるときにその円周上の1点が描く曲線として知られる。この曲線の長さ L を、パラメータ表示の長さの公式 $L =$

$\int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ を使って求めよ。

$L =$

応3

面積を2等分する点を求める

曲線 $y = x^2$ と x 軸、直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積を、直線 $x = a$ ($0 < a < 2$) が2等分するという。 a の値を求めよ。

$a =$

応4

$1+(y')^2=\sec^2x$ になる曲線の長さ

曲線 $y = \ln(\cos x)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) の長さ L を求めよ。

$L =$

応5

y軸回転の体積

曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) と y 軸、直線 $y = 4$ で囲まれた部分を、 y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \text{ア} \pi$ と表せる。アを求めよ。

ア =

応6

面積の最小値 (微分との融合)

$0 < t < 1$ とする。曲線 $y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線を l とする。曲線 $y = x^2$ ・接線 l ・ y 軸 (直線 $x = 0$) で囲まれる部分の面積 ($0 \leq x \leq t$) を $S_1(t)$ 、曲線 $y = x^2$ ・接線 l ・直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積 ($t \leq x \leq 1$) を $S_2(t)$ とする。 $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ を最小にする t の値は $t = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ 、そのときの最小値は $S = \frac{1}{\text{ウ}}$ である。ア・イ・ウを求めよ。

ア = イ = ウ =

DRILL 記述チャレンジ

答えだけでなく「なぜそうなるか」を文章と式で書く練習。模範解答と見比べて、書き方の型を身につけよう。

記1

回転体の体積の公式 $V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$ は、なぜ $f(x)$ ではなく $\{f(x)\}^2$ を積分する形になるのか、断面の図形に触れながら説明せよ。

記2

曲線 $y = x^2$ と直線 $y = 4$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。上の関数・下の関数と積分区間を、根拠を示しながら答案として仕上げよ。
