

面積・体積・曲線の長さ

解答（全19問）

氏名 _____

得点 /19点

DRILL

練習問題（全14問）

基本（1～6）

1

曲線とx軸の間の面積

曲線 $y = x^2$ と x 軸、および直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 2$) を求めよ。

$$S = \underline{8/3}$$

$$S = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S = \frac{8}{3}$$

2

曲線と直線の間の面積

曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 1$) を求めよ。

$$S = \underline{1/6}$$

$0 \leq x \leq 1$ では $x \geq x^2$ (上が $y = x$ 、下が $y = x^2$)。

$$S = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$S = \frac{1}{6}$$

3

 e^x の面積

曲線 $y = e^x$ と x 軸、 y 軸、および直線 $x = 1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$$S = \underline{e-1}$$

$$S = \int_0^1 e^x dx = \left[e^x \right]_0^1 = e - 1$$

$$S = e - 1$$

4

 $\sin x$ の面積

曲線 $y = \sin x$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq \pi$) を求めよ。

$$S = \underline{2}$$

$$S = \int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = 1 + 1 = 2$$

$$S = 2$$

5

円錐の体積の確認

直線 $y = x$ ($0 \leq x \leq 3$) を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \text{ア} \pi$ と表せる。アを求めよ。

ア = 9

$$V = \pi \int_0^3 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9\pi$$

$$\text{ア} = 9$$

6

球の体積の確認

円 $x^2 + y^2 = 4$ の上半分を x 軸のまわりに1回転させてできる球の体積は $V = \frac{\text{ア}}{3} \pi$ と表せる。アを求めよ。

ア = 32

$$V = \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \pi \left(\frac{16}{3} + \frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3} \pi$$

$$\text{ア} = 32$$

標準 (7~11)

7

上下の関係を確認

曲線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x$ で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 2$) を求めよ。

$S =$ 4/3

$0 \leq x \leq 2$ では $2x \geq x^2$ (上が $y = 2x$ 、下が $y = x^2$)。

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$S = \frac{4}{3}$$

8

部分積分の結果を利用

曲線 $y = \ln x$ と x 軸、および直線 $x = e^2$ で囲まれた部分の面積 S ($1 \leq x \leq e^2$) を求めよ。

$$S = \underline{e^2 + 1}$$

$$S = \int_1^{e^2} \ln x \, dx = \left[x \ln x - x \right]_1^{e^2}$$

$$x = e^2 \text{ を代入: } e^2 \ln(e^2) - e^2 = 2e^2 - e^2 = e^2 \quad x = 1 \text{ を代入: } 1 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$S = e^2 - (-1) = e^2 + 1$$

$$S = e^2 + 1$$

9

2曲線の間を回転 (外側²-内側²)

曲線 $y = \sqrt{x}$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分 ($0 \leq x \leq 1$) を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V を、 $V = \frac{\pi}{\mathcal{A}}$ の形で求めよ。 $\mathcal{A}$ を求めよ。

$$\mathcal{A} = \underline{6}$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ では } \sqrt{x} \geq x \text{ なので、外側の半径が } \sqrt{x}、\text{内側の半径が } x。$$

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - x^2] \, dx = \pi \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\mathcal{A} = 6$$

10

直線でも公式が使えることの確認

直線 $y = 2x + 1$ ($0 \leq x \leq 3$) の長さ L を、曲線の長さの公式を使って求めよ。

$$L = \underline{3\sqrt{5}}$$

$$y' = 2 \text{ より } 1 + (y')^2 = 1 + 4 = 5.$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{5} dx = 3\sqrt{5}$$

2点 $(0, 1)$ 、 $(3, 7)$ 間の距離 $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ と一致し、公式が正しいことが確認できる。

$$L = 3\sqrt{5}$$

11

 $1+(y')^2=1+x$ の形になる

曲線 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ ($0 \leq x \leq 3$) の長さ L を求めよ。

$$L = \underline{14/3}$$

$$y' = x^{1/2} \text{ より } 1 + (y')^2 = 1 + x.$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{2}{3} (4^{3/2} - 1) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}$$

$$L = \frac{14}{3}$$

挑戦 (12~14)

12

y軸回転は x^2 を y の式にして y で積分

曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) と y 軸、直線 $y = 1$ で囲まれた部分を、 y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積 V を、 $V = \frac{\pi}{\mathcal{A}}$ の形で求めよ。 $\mathcal{A}$ を求めよ。

$\mathcal{A} =$ 2

$y = x^2$ ($x \geq 0$) を x について解くと $x = \sqrt{y}$ 、すなわち $x^2 = y$ 。

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{A} = 2$$

13

接線の式を先に求める

曲線 $y = e^x$ と、その $x = 0$ における接線で囲まれた部分の面積 S ($0 \leq x \leq 1$) を求めよ。

$S =$ $e - \frac{5}{2}$

$y' = e^x$ より、 $x = 0$ での傾きは $e^0 = 1$ 。接点は $(0, 1)$ なので接線は $y = x + 1$ 。

e^x は下に凸 (つねに接線より上) なので、 $0 \leq x \leq 1$ で $e^x \geq x + 1$ 。

$$S = \int_0^1 \{e^x - (x + 1)\} dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{2} - 1 \right) - (1 - 0 - 0) = e - \frac{3}{2} - 1 = e - \frac{5}{2}$$

$$S = e - \frac{5}{2}$$

曲線 $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ ($1 \leq x \leq 2$) の長さ L を求めよ。

$$L = \underline{\underline{17/12}}$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

$$(y')^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}, \text{ よって } 1 + (y')^2 = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \right)^2$$

$$x > 0 \text{ なので } \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}$$

$$L = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x} \right]_1^2$$

$$x = 2 \text{ を代入: } \frac{8}{6} - \frac{1}{4} = \frac{4}{3} - \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \quad x = 1 \text{ を代入: } \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} = -\frac{4}{12}$$

$$L = \frac{13}{12} - \left(-\frac{4}{12} \right) = \frac{17}{12}$$

$$L = \frac{17}{12}$$

DRILL

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。2曲線の回転体・サイクロイド・面積等分など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

2曲線の間を回転

曲線 $y = x^2$ と $y = x$ で囲まれた部分 ($0 \leq x \leq 1$) を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \frac{\text{ア}}{15}\pi$ と表せる。アを求めよ。

ア = 2

$0 \leq x \leq 1$ では $x \geq x^2$ なので、外側の半径が x 、内側の半径が x^2 。

$$V = \pi \int_0^1 [x^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{15}\pi$$

ア = 2

サイクロイド $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) は、円が転がるときにその円周上の1点が描く曲線として知られる。この曲線の長さ L を、パラメータ

表示の長さの公式 $L = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$ を使って求めよ。

$$L = \underline{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 - \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = \\ &= 2 - 2\cos t \end{aligned}$$

半角公式 $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$ を使うと

$$\begin{aligned} 2 - 2\cos t &= 4 \sin^2 \frac{t}{2}, \quad \text{よって } \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| \\ 0 \leq t \leq 2\pi \text{ では } \frac{t}{2} &\text{ は } 0 \text{ から } \pi \text{ までなので } \sin \frac{t}{2} \geq 0, \text{ 絶対値ははずせる。} \end{aligned}$$

$$L = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -4 \cos \pi - (-4 \cos 0) = 4 + 4 = 8$$

$$L = 8$$

曲線 $y = x^2$ と x 軸、直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積を、直線 $x = a$ ($0 < a < 2$) が2等分するという。 a の値を求めよ。

$$a = \sqrt[3]{4}$$

まず全体の面積を求める。

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

これを $x = a$ で2等分するので、0 から a までの面積がちょうど半分の $\frac{4}{3}$ になればよい。

$$\int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a^3 = 4$$

$$a = \sqrt[3]{4} \quad (0 < a < 2 \text{ を満たす実数はこれだけ})$$

$$a = \sqrt[3]{4} \quad (= 2^{2/3})$$

応4

$1+(y')^2=\sec^2 x$ になる曲線の長さ

曲線 $y = \ln(\cos x)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) の長さ L を求めよ。

$$L = \ln(1+\sqrt{2})$$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\text{三角関数の相互関係の公式})$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ では } \cos x > 0 \text{ なので } \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{\cos x}。$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx \text{ を求めるには、次のように分母分子に } \cos x + \frac{1}{\cos x} \cdots \text{ではな}$$

$$\text{く、} \frac{1}{\cos x} (= \sec x) \text{ に } \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \text{ をかける工夫を使う。}$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

分子は $u = \sec x + \tan x$ の導関数 $u' = \sec x \tan x + \sec^2 x$ にちょうど一致するので

$$\int \sec x dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

これを使うと

$$L = \left[\ln |\sec x + \tan x| \right]_0^{\pi/4} = \ln(\sqrt{2} + 1) - \ln(1 + 0) = \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$L = \ln(1 + \sqrt{2})$$

応5

y 軸回転の体積

曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) と y 軸、直線 $y = 4$ で囲まれた部分を、 y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積は $V = \text{ア} \pi$ と表せる。アを求めよ。

$$\text{ア} = \underline{8}$$

$$y = x^2 \text{ を } x \text{ について解くと } (x \geq 0) \ x^2 = y。$$

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = \pi \cdot 8 = 8\pi$$

$$\text{ア} = 8$$

