

定積分とその計算

解答（全21問）

氏名 _____

得点 _____ / 21点

DRILL

練習問題（全16問）

基本（1～8）

1

基本の公式で直接計算

$\int_0^2 x^2 dx$ を求めよ。

値 8/3

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

$\frac{8}{3}$

2

1次式の定積分

$\int_1^3 (2x + 1) dx$ を求めよ。

値 10

$$\int_1^3 (2x + 1) dx = \left[x^2 + x \right]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10$$

10

3

 e^x の定積分

$\int_0^1 e^x dx$ を求めよ。

値 $e-1$

$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

 $e - 1$

4

 $\sin x$ の定積分

$\int_0^\pi \sin x dx$ を求めよ。

値 2

$$\int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2$$

2

5

 $\cos x$ の定積分

$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ を求めよ。

値 1

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \left[\sin x \right]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$$

1

6

 $1/x$ の定積分

$\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx$ を求めよ。

値 $\ln 2$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln |x| \right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

 $\ln 2$

7

 $1/\cos^2 x$ の定積分

$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$ を求めよ。

値 1

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \left[\tan x \right]_0^{\pi/4} = 1 - 0 = 1$$

1

8

係数つき・負の下端

$\int_{-1}^2 3x^2 dx$ を求めよ。

値 9

$$\int_{-1}^2 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_{-1}^2 = 8 - (-1) = 9$$

9

標準 (9~14)

9

置換積分 (べき乗型)

$\int_0^1 x(x^2 + 1)^2 dx$ を求めよ。

値 7/6

$u = x^2 + 1$ とおくと $du = 2x dx$ 。 $x : 0 \rightarrow 1$ のとき $u : 1 \rightarrow 2$ 。

$$\int_0^1 x(x^2 + 1)^2 dx = \int_1^2 \frac{1}{2} u^2 du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{6} (8 - 1) = \frac{7}{6}$$

 $\frac{7}{6}$

10

置換積分（根号型）

$$\int_0^3 x \sqrt{x^2 + 16} dx \text{ を求めよ。}$$

値 $\frac{61}{3}$

$u = x^2 + 16$ とおくと $du = 2x dx$ 。 $x : 0 \rightarrow 3$ のとき $u : 16 \rightarrow 25$ 。

$$\int_0^3 x \sqrt{x^2 + 16} dx = \int_{16}^{25} \frac{1}{2} u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{3/2} \right]_{16}^{25} = \frac{1}{3} (25^{3/2} - 16^{3/2}) = \frac{1}{3} (125 - 64) = \frac{61}{3}$$

$$\frac{61}{3}$$

11

部分積分（ $x \cdot e^x$ 型）

$$\int_0^2 x e^x dx \text{ を求めよ。}$$

値 $e^2 + 1$

$f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ と選ぶ。

$$\int_0^2 x e^x dx = \left[x e^x - e^x \right]_0^2 = (2e^2 - e^2) - (0 - 1) = e^2 + 1$$

$$e^2 + 1$$

12

部分積分（ $\ln x$ 型）

$$\int_1^{e^3} \ln x dx \text{ を求めよ。}$$

値 $2e^3 + 1$

$f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$ と選ぶ。

$$\int_1^{e^3} \ln x dx = \left[x \ln x - x \right]_1^{e^3} = (3e^3 - e^3) - (0 - 1) = 2e^3 + 1$$

$$2e^3 + 1$$

13

奇関数の性質

$$\int_{-2}^2 (x^3 + 3x) dx \text{ を求めよ。}$$

値 0

$f(x) = x^3 + 3x$ は $f(-x) = -x^3 - 3x = -f(x)$ より奇関数。区間が原点对称なので、計算するまでもなく積分は 0。

0

14

偶関数の性質

$$\int_{-1}^1 (3x^2 + 2) dx \text{ を求めよ。}$$

値 6

$$f(x) = 3x^2 + 2 \text{ は偶関数なので } \int_{-1}^1 (3x^2 + 2) dx = 2 \int_0^1 (3x^2 + 2) dx。$$

$$2 \left[x^3 + 2x \right]_0^1 = 2(1 + 2) = 6$$

6

挑戦 (15~16)

15

円の面積との対応

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ を求めよ。

値 $\pi/4$

$x = \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とおくと、 $x: 0 \rightarrow 1$ のとき $\theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 、 $dx = \cos \theta d\theta$ 、 $\sqrt{1-x^2} = \cos \theta$ 。

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$ (STEP3のKing propertyの例題と同じ計算)

半径1の円の面積 π のちょうど $\frac{1}{4}$ (第1象限の扇形) と一致することでも検算できる。

$\frac{\pi}{4}$

16

部分積分+三角関数の値

$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ を求めよ。

値 $\pi/2 - 1$

$f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$ と選ぶ ($f'(x) = 1$, $g(x) = \sin x$)。

$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx = \left[x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 \right) - \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2}$
 $= \frac{\pi}{2} - ((-0) - (-1)) = \frac{\pi}{2} - 1$

$\frac{\pi}{2} - 1$

応用問題（プリント限定）

ここから先はPDF限定の腕試し。区分求積法の本格問題や絶対値つきの積分など、入試の基礎レベルに挑戦しよう。

応1

区分求積法（本格）

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \text{ を求めよ。}$$

値 $\pi/4$

分母・分子を n^2 で割って「 $\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$ 」の形をつくる。

$$\frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

よって $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ は $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ の区分求積の形。

$n \rightarrow \infty$ の極限は $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$ に一致する。

この積分は $x = \tan \theta$ とおくと計算できる（数Ⅲの積分公式として $\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + C$ を使ってもよい）。

$x : 0 \rightarrow 1$ のとき $\theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ なので

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \left[\arctan x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}$$

応2

円の面積の4分の1

$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ を求めよ。

値 π

$x = 2 \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とおくと $dx = 2 \cos \theta d\theta$ 、 $\sqrt{4-x^2} = 2 \cos \theta$ 。 $x : 0 \rightarrow 2$ のとき $\theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 。

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} 2 \cos \theta \cdot 2 \cos \theta d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

図形的に考えると、 $y = \sqrt{4-x^2}$ ($x \geq 0, y \geq 0$) は半径2の円の第1象限部分。この積分はその面積、つまり半径2の円の面積 4π のちょうど $\frac{1}{4}$ に等しい。

$4\pi \times \frac{1}{4} = \pi$ と、図形の公式だけでも同じ答えが出せる（検算に使える）。

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \pi$$

応3

絶対値付きの定積分

$\int_0^3 |x-1| dx$ を求めよ。

値 $5/2$

絶対値の中身の符号が変わる $x = 1$ で積分区間を分割する。

$0 \leq x \leq 1$ では $x-1 \leq 0$ なので $|x-1| = 1-x$ 。 $1 \leq x \leq 3$ では $x-1 \geq 0$ なので $|x-1| = x-1$ 。

$$\int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$$

$$\int_0^1 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^3 (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = 2$$

$$\text{合計は } \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$\int_0^3 |x-1| dx = \frac{5}{2} \quad (= 2.5)$$

応4

置換積分 (lnxとxの組み合わせ)

$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ を求めよ。

値 $1/2$

$u = \ln x$ とおくと $du = \frac{1}{x} dx$ 。ちょうど $\frac{1}{x} dx$ が式の中にあるのでそのまま置き換えられる。

$x: 1 \rightarrow e$ のとき $u: 0 \rightarrow 1$ ($\ln 1 = 0, \ln e = 1$)。

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$$

応5

奇関数・偶関数の分離+King property

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^3 \cos x + \sin^2 x) dx$ を求めよ。

値 $\pi/2$

和の積分は分けて計算できるので、まず2つの項の偶奇を確認する。

$x^3 \cos x$: x^3 は奇関数、 $\cos x$ は偶関数なので、積は奇関数×偶関数=奇関数。区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ は原点对称なので、この項の積分は計算するまでもなく 0。

$\sin^2 x$: $\sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$ より偶関数。よって

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$$

STEP3のKing propertyの例題より $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$ なので、 $2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 。

$$\text{合計すると } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^3 \cos x + \sin^2 x) dx = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (x^3 \cos x + \sin^2 x) dx = \frac{\pi}{2}$$